সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান (২)

বিধেয়কলন :
একমানক বাক্য ও যুক্তি

রমাপ্রসাদ দাস

রীডার্স কর্নার
৫ শঙ্কর ঘোষ লেন। কলিকাতা ৬

প্রথম প্রকাশ—রাসপূর্ণিমা, ১৩৬৬

প্রচ্ছদ

শ্রীসমর দে

প্রকাশক ও মুদ্রক শ্রীসৌরেন্দ্রনাথ মিত্র, এম-এ

বোধি প্রেস। ৫ শঙ্কর ঘোষ লেন। কলিকাতা ৬

সুস্মিতা প্রসাদ-কে

মুখবন্ধ

এটা পুস্তক পর্ষদ প্রকাশিত 'সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান'-এর দ্বিতীয় খণ্ড। এর তৃতীয় খণ্ড মুদ্রাযন্ত্রে, প্রকাশের অপেক্ষায়। তিনটি খণ্ডের নাম থেকে এদের বিষয়বস্তুর পরিচয় মিলবে :

১. সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান : বাক্যকলন

২. সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান : বিধেয়কলন—একমানক বাক্য ও যুক্তি

৩. সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান : বিধেয়কলন—অনেকমানক বাক্য ও যুক্তি

এ বইগুলির বিষয়বস্তু আয়ত্ত করতে পারলে প্রাথমিক সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান সম্পর্কে একটা সুস্পষ্ট ধারণা হবে এবং যুক্তিবৈজ্ঞানিক প্রক্রিয়ায় কাঙ্খিত নৈপুণ্য অর্জন করা যাবে বলে আমার দৃঢ় বিশ্বাস।

* * *

প্রথমে বর্তমান খণ্ডের সংকেতলিপি সম্পর্কে একটা কথা। প্রচলিত

$$(x),\ (y),\ \ldots;\ (\exists x),\ (\exists y),\ \cdots;\ \cdots$$

-এর পরিবর্তে এ বইতে ব্যবহার করা হয়েছে

$$\mathrm{U}x,\ \mathrm{U}y,\ \cdots;\ \exists x,\ \exists y,\ \cdots;\ \cdots$$

কেন প্রচলিত সংকেতলিপি ছেড়ে এ কদাচিৎ-ব্যবহৃত সংকেতলিপি ব্যবহার করলাম? প্রথমত (x) আর $(\exists x)$-এর মধ্যে আনুরূপ্য নেই—$(\exists x)$-এতে 'x' ছাড়াও আছে '$\exists$', কিন্তু (x)-এতে আছে কেবল নিঃসঙ্গ 'x'। দ্বিতীয়ত, (x)-এর বদলে '$\mathrm{U}x$' লিখলে বা (y)-এর বদলে '$\mathrm{U}y$' লিখলে বন্ধনীর দৌরাত্ম্য থেকে কিছুটা মুক্তি পাওয়া যায়—সার্বিক ও সাত্তিক মানক বন্ধনী বাদ দিয়েও ব্যক্ত করা যায় (কিন্তু (x)-এর বদলে, মানক হিসাবে, কেবল 'x' লেখা চলে না)। তৃতীয়ত, $\mathrm{U}x$, $\exists y$ ইত্যাদি ব্যবহার করার আর একটা সুবিধা হল এই : প্রয়োজন হলে, সব গ্রাহক বাদ দিয়েও মানকিত বাক্য ব্যক্ত করা যায়। যথা

$$(x)\,(Fx \supset Gx) \qquad \mathrm{U}x\,(Fx \supset Gx)$$

-কে আরও সংক্ষেপে এভাবে ব্যক্ত করা যায়

$$\mathrm{U}\,(F \supset G)$$

অনুরূপভাবে

$$(\exists x)\,(Fx \cdot Gx) \qquad \exists x\,(Fx \cdot Gx)$$

-এর পরিবর্তে লেখা যায়

$$\exists(F \cdot G) \qquad \exists(FG) \quad \text{বা } \exists FG$$

বস্তুত এ বইর অধ্যায় ১১ থেকে শেষ পর্যন্ত শেষোক্ত রূপ সংকেতলিপি ব্যবহার করে

-এর পরিবর্তে যথাক্রমে লিখেছি

$$U(F \supset G),\ U(F \supset \sim G),\ \exists FG,\ \exists F\bar{G}$$

আর প্রথম থেকে অধ্যায় ১০ পর্যন্ত ব্যবহার করেছি প্রচলিত মানকলিপি (সামান্য পরিবর্তন করে—(x)-এর জায়গায় Ux, $(\exists x)$-এর জায়গায় $\exists x$, লিখে)।

একই বইতে দু রকম সংকেতলিপি ব্যবহার করা হল কেন—এ প্রশ্ন উঠতে পারে। আসলে একমানক বাক্য ও যুক্তির বেলায় গ্রাহক x, y ইত্যাদি ব্যবহার না করলেও চলে। কিন্তু আমার ধারণা, যারা এই বই পড়বে প্রচলিত মানকলিপির সঙ্গে তাদের আগেই পরিচয় হয়েছে। তাদের কথা ভেবে, প্রথম কয়টি অধ্যায়ে প্রচলিত মানকলিপি ব্যবহার করা হল। আরও একটা কথা। পরবর্তী-খণ্ডে-আলোচ্য অনেকমানক বাক্যের বেলায় প্রচলিত লিপির, কাজেই ভিন্ন ভিন্ন গ্রাহক, x, y, z ইত্যাদির, ব্যবহার অপরিহার্য। কাজেই প্রচলিত লিপির সঙ্গে পরিচয়, ও এ লিপি ব্যবহারে নৈপুণ্য, থাকাও বাঞ্ছনীয়।

* * *

সাধারণত প্রমাণ পদ্ধতি হিসাবে প্রাধান্য দেওয়া হয় অপরোক্ষ পদ্ধতিকে—যে পদ্ধতি অনুসারে IP নিয়ম প্রয়োগ না করে প্রদত্ত হেতুবাক্য (বা পূর্বকল্প) থেকে সিদ্ধান্ত (বা অনুকল্প) নিষ্কাশন করা হয়। এটাই প্রচলিত রীতি। এ বইতে কিন্তু পরোক্ষ পদ্ধতিকেই (যে পদ্ধতিতে IP নিয়ম প্রয়োগ করা হয় তাকেই) মুখ্য পদ্ধতি বলে বর্ণনা করা হয়েছে। এবং এ পদ্ধতির ওপরই বেশী গুরুত্ব দেওয়া হয়েছে। এ পদ্ধতির সুবিধা হল—এতে UG বা EG প্রয়োগের কোনো প্রয়োজন হয় না। প্রসঙ্গত, যে বইগুলি আমার হাতের কাছে আছে তার মধ্যে বারকার, আকেরমান্ ও পসপেসিল (গ্রন্থপঞ্জি দ্রষ্টব্য)-এতে উক্ত রীতির ব্যতিক্রম দেখি। তবে এ সব গ্রন্থে আছে কেবল পরোক্ষ পদ্ধতি। কিন্তু এ বইতে পরোক্ষ অপরোক্ষ এ দুটি পদ্ধতিরই প্রয়োগ দেখানো হয়েছে।

* * *

এ বইর আর একটা বৈশিষ্ট্য। এ বৈশিষ্ট্যের কথা বলতে হলে যুক্তিবিজ্ঞান পঠনপাঠন রীতি সম্পর্কে একটা কথা বলে নেওয়া দরকার। বাক্য যুক্তিবিজ্ঞান পড়াতে গিয়ে আমরা নির্ণয় পদ্ধতির (decision procedure-এর) ওপর বিশেষ গুরুত্ব দিই—শিক্ষার্থীদের একাধিক নির্ণয় পদ্ধতি, যথা সত্যসারণী, আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ, সত্যশাখী, শিখিয়ে দিই। কিন্তু বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞান পড়াতে গিয়ে নির্ণয় পদ্ধতির কথা ভুলে যাই; কেবল প্রমাণ পদ্ধতি শিখিয়েই দায় সারি। এটা যে কেবল পাঠনরীতির দোষ তা নয়। যে পাঠ্য বইগুলি আমরা সাধারণত ব্যবহার করি সেগুলিতেও বিধেয় যুক্তি প্রসঙ্গে নির্ণয় পদ্ধতির কথা তোলা হয় না। উদাহরণ—কোপি, সুপিস্, এ্যামব্রোস্ ল্যাজারওবিটস-এর বই (গ্রন্থপঞ্জি দ্রষ্টব্য)।

যে অপূর্ণতার কথা বললাম এ বইতে তা দূর করার চেষ্টা করা হয়েছে। এতে পরপর কয়টি নির্ণয় পদ্ধতি বিশদভাবে ব্যাখ্যা করেছি। এ পদ্ধতিগুলি হল: সত্যসারণী পদ্ধতি, সত্যশাখী পদ্ধতি, সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি (method of existential condi-

tional), প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি (cellular method), সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি (CNF পদ্ধতি)। আমরা বলেছি, সাধারণ পাঠ্য বইতে বিধেয় যুক্তি প্রসঙ্গে নির্ণয় পদ্ধতির কথা তোলা হয় না। এর উল্লেখযোগ্য ব্যতিক্রম কোয়াইন্, আর হিউজেস্ ও লন্‌ডি। বস্তুত উক্ত নির্ণয় পদ্ধতিগুলি আলোচনা করতে গিয়ে আমি এ বই দুটির ওপর অনেকখানি নির্ভর করেছি। আর সাহায্য নিয়েছি জেফ্‌রির। এ বইটাও একটা ব্যতিক্রম। তবে এতে আলোচিত হয়েছে কেবল সত্যশাখী।

*　　　　*　　　　*

আরও একটা বৈশিষ্ট্য। সাধারণ পাঠ্য বইতে, বিধেয় খণ্ডে, তন্ত্রীকরণের কথা বলা হয় না। এ বইতে আমরা দুটি তন্ত্রখণ্ড উত্থাপন করেছি (অধ্যায় ১৬): মানকিত বাক্যের তন্ত্রিত রূপ—বিধেয় তন্ত্র ১, মিশ্র বাক্যের তন্ত্রিত রূপ, বিধেয় তন্ত্র ২। এগুলি Principia-র বিধেয় তন্ত্রের সরলীকৃত রূপ। সরলীকরণের উদ্দেশ্যেই তন্ত্রবাক্যগুলি দুভাগে ভাগ করা হয়েছে—মানকিত তন্ত্রবাক্য ও মিশ্র তন্ত্রবাক্য (পৃঃ ২৫০)। প্রচলিত মানকলিপি সরলীকরণ করার দরুন Principia-র বিধেয় তন্ত্র অনেক সরলভাবে উত্থাপন করা সম্ভব হল।

*　　　　*　　　　*

উদ্ধৃতি চিহ্নের ব্যবহার সম্পর্কে একটা কথা। প্রয়োগ (use) ও উল্লেখ (mention)-এর পার্থক্য সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান : বাক্যকলন-এতে ব্যাখ্যা করা হয়েছে এবং ঐ খণ্ডে এ পার্থক্য সাধারণভাবে মেনে চলা হয়েছে—মানে উদ্ধৃতি চিহ্ন যথাস্থানে প্রয়োগ করেছি। কিন্তু সরলীকরণের খাতিরে বর্তমান খণ্ডের অনেক স্থলে উদ্ধৃতি চিহ্ন পরিহার করা হয়েছে। যেমন, আমরা বলেছি ঃ যদি $p \supset q$ স্বতসত্য হয় এবং $r \supset s$ স্বতসত্য হয় তাহলে $(p \vee r) \supset (q \vee s)$-ও স্বতসত্য (পৃঃ ২৪৭)। এ রকম ক্ষেত্রে উদ্ধৃতি চিহ্নের অব্যবহার কোনো অসুবিধা বা বিভ্রান্তি সৃষ্টি করার কথা নয়।

*　　　　*　　　　*

এ বইর পাণ্ডুলিপির প্রথম খসড়া কলকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের দর্শন বিভাগের অধ্যাপক শ্রীসুবীররঞ্জন ভট্টাচার্যকে দেখতে দিয়েছিলাম। শ্রীমান সুবীর কিছু ভুল সংশোধন করে দিয়েছে। এ বইর অধিকাংশ অনুশীলনী ওর সংগ্রহ। আর "পাঠনির্দেশ"ও তৈরী করে দিয়েছে শ্রীমান সুবীর। ওর কাছে আমার ঋণের কথা উচ্চকণ্ঠে ঘোষণা করলে ও অস্বস্তি বোধ করবে। কাজেই ও কথা থাক।

পাণ্ডুলিপির চূড়ান্ত খসড়া পরিদর্শন করেন প্রখ্যাত অধ্যাপক ডঃ প্রণবকুমার সেন। তিনিই ছিলেন পর্ষদ-মনোনিত 'নিরীক্ষক'। পঠনপাঠন ও গবেষণা সংক্রান্ত নানা কাজে সর্বদা ব্যস্ত থাকা সত্ত্বেও, যে যত্ন ও নিষ্ঠা সহকারে তিনি অত্যল্প সময়ে হাতে-লেখা পাণ্ডুলিপি পরীক্ষণের মত অপ্রিয় কাজ সম্পাদন করেছেন তা বিস্ময়কর। ডঃ সেন কিছু কিছু ত্রুটি বিচ্যুতির দিকে দৃষ্টি আকর্ষণ করেন এবং নানা ব্যাপারে পরামর্শ দেন। ওর পরামর্শমত বইর এখানে সেখানে কিছু পরিবর্তন ও পরিবর্ধন করেছি। ডঃ সেনের কাছে

আমার ঋণ কৃতজ্ঞচিত্তে স্মরণ করি। তিনি পুঙ্খানুপুঙ্খরূপে পাণ্ডুলিপি দেখে না দিলে আরও ত্রুটি বিচ্যুতি থেকে যেত।

"আরও" বলছি এ আশঙ্কায়—হয়ত লেখকের যত্ন ও অধ্যবসায় সত্ত্বেও বইতে কিছু ভুলভ্রান্তি রয়ে গেছে। সংকেতলিপিতে-লেখা বইর পাণ্ডুলিপি প্রণয়ন থেকে প্রুফ সংশোধন যদি একই হাত দিয়ে হয় তাহলে ছাপার ভুল ও অনবধানতাজাত ভুলের সম্ভাবনা থেকে যায়।

ভুলভ্রান্তি আশঙ্কার আর একটা হেতুর সঙ্গে জড়িত এ বই লেখার ইতিহাস। এ ইতিহাস সংক্ষেপে বলছি। ১৯৮৩ সালের শেষের দিকে আমি হঠাৎ অসুস্থ হয়ে পড়ি এবং ফলে আমাকে প্রায় দু মাস গৃহবন্দী ও নজরবন্দী হয়ে থাকতে হয়। এটা শাপে বর। এ দু মাসের নিশ্ছিদ্র অবসরের মধ্যে বইটা লিখে ফেলি। অসুস্থ অবস্থায় মানসিক শৈথিল্য অনবধানতা ও স্মৃতিভ্রংশ হওয়া বিচিত্র নয়। এ জন্যই এ বই পাঠকের হাতে তুলে দিতে আমার কুণ্ঠা। তবে আমায় আশ্বস্ত করেছে এ বইর উৎকর্ষ সম্পর্কে ডঃ সেনের উচ্ছ্বসিত প্রশংসা।

মডার্ন প্রিণ্টার্সের শ্রীসুরেশ দত্ত ও শ্রীগৌর পালকে এবং এর কর্মীদের আন্তরিক ধন্যবাদ জানাই। এরা লেখকের অনেক অত্যাচার মুখ বুজে সয়েছেন। আর ধন্যবাদ জানাই পুস্তক পর্ষদের কর্মীদের। যখনই চেয়েছি এদের সক্রিয় সাহায্য পেয়েছি।

বেশী গুরুত্ব দিতে চাই বলে একটা কথা সব শেষের জন্য রেখে দিয়েছি। বইটির প্রকাশনার ব্যাপারে নানা সমস্যা দেখা দিয়েছিল। পর্ষদের বর্তমান কর্ণধার ডঃ লাডলীমোহন রায়চৌধুরীর সহৃদয়তা তৎপরতা ও প্রশাসনিক কুশলতা ছাড়া এসব সমস্যা দ্রুত সমাধান হত না ও সরকারী নিয়ম কানুনের লাল-ফিতার বাঁধন থেকে বইটি এত সহজে মুক্তি পেত না। ডঃ রায়চৌধুরীকে আন্তরিক ধন্যবাদ জানাই।

সূচীপত্র

৫

মানকিত বাক্যের সমার্থক ও বিরুদ্ধ বাক্য

৬

প্রমাণ পদ্ধতি : মুখ্য অবরোহী পদ্ধতি

৭

প্রমাণ পদ্ধতি : প্রচলিত অবরোহী পদ্ধতি

৮

UG ও EI-এর ন্যায্যতা

৯
অবৈধতা প্রমাণ পদ্ধতি

১০
সত্যশাখী পদ্ধতি

১১
মানকলিপির সরলীকরণ

১২
সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি

১৩
প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি (Cellular Method)

১৪
সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি

১৫
মিশ্র বাক্য ও নির্ণয় পদ্ধতি

১৬
বিধেয় বাক্যের তন্ত্রীকরণ

পরিশিষ্ট

সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান (২)

বিধেয়কলন :
একমানক বাক্য ও যুক্তি

১

ভূমিকা ঃ বিধেয় যুক্তি ও বিভিন্ন প্রকারের সংকেতলিপি

অবরোহ যুক্তিকে দু ভাগে ভাগ করা যায় ঃ বাক্য যুক্তি ও বিধেয় যুক্তি। বাক্য যুক্তির অন্য নাম সত্যাপেক্ষ যুক্তি।

ধরে নেওয়া হল—বাক্য যুক্তির সঙ্গে তোমাদের পরিচয় আছে। কি করে বাক্য যুক্তির আকার উদ্ধার করতে হয়, এদের সংকেতলিপিতে ব্যক্ত করতে হয়, বৈধতা নির্ণয় বা প্রমাণ করতে হয়, তা তোমাদের জানা। এ খণ্ডে আমরা বলব বিধেয় যুক্তির কথা।

"বিধেয় যুক্তি" কথাটা সম্ভবত এই প্রথম শুনছ। তবে বিধেয় যুক্তিও তোমাদের পূর্ব পরিচিত। গতানুগতিক-যুক্তিবিজ্ঞানে-আলোচিত অমাধ্যম যুক্তি, ন্যায় —এসবের সঙ্গে তোমাদের পরিচয় আছে, আর এসব বিধেয় যুক্তি বলে গণ্য। এ রকম যুক্তিকে নব্য যুক্তি-বিজ্ঞানীরা কেন বিধেয় যুক্তি বলে অভিহিত করেন তা পরে বোঝা যাবে।

আপাতত বাক্য যুক্তির ও বিধেয় যুক্তির উদাহরণ নাও, দেখবে—এদের পার্থক্য খুব গুরুত্বপূর্ণ।

বাক্য যুক্তি

(১) If it rains then the ground is wet,
it rains ;
∴ the ground is wet.

(২) If we go to war then the wages will increase,
if wages increase then there will be inflation ;
∴ if we go to war then there will be inflation.

বিধেয় যুক্তি

(৩) All men are mortals,
all kings are men ;
∴ all kings are mortals.

(৪) All men are mortals,
Socrates is a man ;
∴ Socrates is a mortal,

বাক্য যুক্তির আকার দেখানো হয় যুক্তির অন্তর্গত অযৌগিক বাক্যের জায়গায় বর্ণপ্রতীক বসিয়ে। যেমন (১) আর (২)-এর আকার দেখতে পারি এভাবে

(১′) $p \supset q$, (২′) $p \supset q$,
p; $q \supset r$;
$\therefore$ q. $\therefore$ $p \supset r$.

বিধেয় যুক্তির আকারও যদি এ কায়দায় দেখাতে হত তাহলে বলতে হত উক্ত বিধেয় যুক্তি দুটির আকার হল :

p,
q;
$\therefore$ r.

কিন্তু বিধেয় যুক্তির আকার এভাবে দেখালে চলবে না। কেন ? প্রথমত, দেখ, (৩) আর (৪) ভিন্ন আকারের যুক্তি : (৩)-এর সব অবয়ব জাতিবিষয়ক বাক্য, (৪)-এর দ্বিতীয় ও তৃতীয় অবয়ব ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য। "p, q; $\therefore$ r" এ বাক্য অনুক্রম দিয়ে (৩) (৪)-এর আকার দেখালে বলতে হবে : (৩) আর (৪)-এর মধ্যে আকারগত কোনো পার্থক্য নেই। কেবল তাই নয়। বিভিন্ন প্রকার ন্যায়ের পার্থক্য অগ্রাহ্য করে বলতে হবে এ উদ্ভট কথাটা : সর্বপ্রকার ন্যায় যুক্তির আকার হল : p, q; $\therefore$ r।

দ্বিতীয়ত, সহজ বুদ্ধিতে বোঝা যায়, (৩) আর (৪) বৈধ যুক্তি। কিন্তু

p,
q;
$\therefore$ r

এ আকারটি কি বৈধ ? না। কেননা, এ আকারের এমন নিবেশন-দৃষ্টান্ত দেখানো যায়—যার হেতুবাক্য সত্য, সিদ্ধান্ত মিথ্যা। যথা

Socrates is a Greek, (p)
Nehru is the first prime minister of India ; (q)
$\therefore$ The author of this book is an Englishman. (r)

এ দৃষ্টান্তে হেতুবাক্য সত্য, সিদ্ধান্ত মিথ্যা। কিন্তু বৈধ যুক্তির—যেমন (৩) (৪)-এর—আকার অবৈধ হতে পারে না। সুতরাং উক্ত আকারটি (৩) (৪)-এর যথার্থ আকার বলে গণ্য হতে পারে না।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে, বাক্য যুক্তির আকার যেভাবে দেখানো হয়, যেভাবে বাক্য যুক্তিকে সংকেতায়িত করা হয়, সেভাবে বিধেয় যুক্তির আকার দেখানো চলবে না বা সংকেতায়িত করা চলবে না।

কোনো বাক্য যুক্তির আকার দেখাতে হলে বা একে সংকেতলিপিতে ব্যক্ত করতে হলে, এর অন্তর্গত অযৌগিক বাক্যগুলির আন্তর গঠন, ভেতরকার চেহারা—কোন্‌টি এর উদ্দেশ্য কোন্‌টি বিধেয়, এসব—দেখাবার দরকার হয় না ; প্রত্যেকটি অযৌগিক বাক্যের

জায়গায় এক একটি অক্ষর লিখলেই চলে। কেননা, এ রকম যুক্তির বৈধতা অবৈধতা নির্ভর করে যুক্তির অন্তর্ভুক্ত এক বাক্যের সঙ্গে অন্য বাক্যের সম্বন্ধের ওপর, কিভাবে বাক্যযোজক অযৌগিক অঙ্গবাক্যগুলিকে যোজিত করে তার ওপর।

কিন্তু কোনো বিধেয় যুক্তির আকার দেখাতে হলে বা এরকম যুক্তিকে সংকেতলিপিতে ব্যক্ত করতে হলে এর অন্তর্ভুক্ত প্রত্যেকটি বাক্যের আন্তর গঠন দেখানো দরকার, দরকার এদের অন্তর্গত প্রত্যেকটি পদের জায়গায় এক একটি অক্ষর বসানো। বস্তুত গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানে (৩)-এর আকার দেখানো হয় এভাবে ঃ

All M are P,
all S are M ;
∴ all S are P.

এত বিশদভাবে বিধেয় যুক্তির আকার দেখাবার দরকার হয় কেন ? উত্তর ঃ বিধেয় যুক্তির বৈধতা অবৈধতা নির্ভর করে যুক্তি-অবয়ব-অন্তর্গত পদগুলির সম্বন্ধের ওপর, পদযোজক পদ-গুলিকে কিভাবে যোজনা করছে তার ওপর। কাজেই এ জাতীয় যুক্তির আকার দেখাতে হলে, বা এরকম যুক্তিকে সংকেতলিপিতে লিখতে হলে, প্রত্যেকটি পদ ও যোজকের সাংকেতিক প্রতিরূপ দেখানো দরকার।

গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানে বিধেয় যুক্তি কিভাবে সংকেতায়িত হয় তা আমাদের জানা, স্কুলপাঠ্য যুক্তিবিজ্ঞানের সঙ্গে যাদের পরিচয় আছে তাদের সবারই জানা। ওপরে এ সংকেতলিপির একটা নমুনা দেওয়া হয়েছে। আমরা কিন্তু বিধেয় যুক্তি সংকেতায়িত করব একটা নতুন লিপিতে। এ সংকেতলিপির নাম মানকলিপি। বিখ্যাত জার্মান গণিতবিদ, যুক্তিবিজ্ঞানী ও দার্শনিক ফ্রেগে*-এর নাম অনুসারে একে ফ্রেগে লিপি বলেও অভিহিত করা যায়।

নতুন লিপির কথা বলাতে এ ধারণা হতে পারে যে, প্রস্তাবিত মানকলিপি ও আমাদের পরিচিত বাক্য-যুক্তিবিজ্ঞান-অনুমোদিত লিপির (সত্যাপেক্ষ সংকেতলিপির**) মধ্যে কোনো সম্পর্ক নেই। আসলে মানকলিপির কতকগুলি উপকরণ সত্যাপেক্ষ লিপি থেকে নেওয়া। আমরা জানি, সত্যাপেক্ষ লিপির উপকরণ হল

$\sim$, $\cdot$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$, p, q, $r \cdots$

ইত্যাদি প্রতীক। দেখতে পাব, মানকলিপিতে লিখতে গেলেও উপরোক্ত প্রতীকগুলি দরকার, আর দরকার এ নতুন প্রতীকগুলি

$a, b, c \cdots F, G, H \cdots x, y \cdots \mathrm{U}x, \mathrm{U}y, \exists x, \exists y \cdots$

প্রশ্ন তুলতে পার ঃ বিধেয় যুক্তির আকার দেখানোর বা সংকেতকরণের জন্য নতুন লিপি উদ্ভাবন করার দরকার হল কেন ? গতানুগতিক লিপিতে *All*—are—, Some—are—

* Gottlob Frege (১৮৪৮-১৯২৫)

** সত্যাপেক্ষ সংকেতলিপি = সত্যাপেক্ষ লিপি = সত্যাপেক্ষ-যুক্তিবিজ্ঞান-অনুমোদিত লিপি

S, P ইত্যাদি দিয়ে বিধেয় যুক্তি ব্যক্ত করলে কী অসুবিধা ? উত্তর ঃ গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানে যে জাতীয় বিধেয় যুক্তির বৈধতা বিচার করা হয় সেগুলি অতি সরল যুক্তি—যাতে থাকে দুটি বা তিনটি পদ। এ রকম সরল যুক্তির বেলায় গতানুগতিক লিপি ব্যবহারে কোনো অসুবিধা নেই, ঠিক। কিন্তু বিধেয় যুক্তি অনেক সময় অনেক জটিল আকার ধারণ করে—যাতে থাকে তিনটির বেশী পদ। মানকলিপির মত পরিণত সংকেতলিপিতে এ জাতীয় যুক্তি ব্যক্ত না করলে, এদের বৈধতা নির্ণয় দুঃসাধ্য হয়ে ওঠে। তাছাড়া মানকলিপিতে লিখতে গিয়ে বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানে-ব্যবহৃত লিপির, সত্যাপেক্ষ লিপির, সাহায্যও পাওয়া যায়। সত্যাপেক্ষ লিপির সঙ্গে গতানুগতিক লিপির কোনো সম্পর্ক নেই। কিন্তু, বলতে পারি, মানকলিপি সত্যাপেক্ষ লিপিরই পরিণত রূপ। তারপর, মানকলিপিতে-ব্যক্ত যুক্তির বৈধতা নির্ণয় ও প্রমাণ করতে গিয়ে বাক্যযুক্তির-জন্য-উদ্ভাবিত নির্ণয় ও প্রমাণ পদ্ধতিও কাজে লাগানো যায়। বাক্য যুক্তিবিজ্ঞান ও বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞান—যুক্তিবিজ্ঞানের এ দু অংশের মধ্যে মানকলিপি যোগসূত্রের কাজ করে।

তিন রকম লিপির কথা বলা হল। আরও এক রকম লিপির সঙ্গে তোমাদের পরিচয় আছে—পরিচয় আছে বুলীয় লিপির সঙ্গে। নিচে এ লিপিগুলির উপকরণ উল্লেখ করা হল।

(১) বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানে যে লিপি ব্যবহৃত হয় তা গঠিত

$$\sim, \cdot, \vee, \supset, \equiv, p, q, r$$

ইত্যাদি দিয়ে,

(২) গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানে ব্যবহৃত লিপির উপকরণ হল
S, P, All—are—, Some—are—,
No—are—, Some—are not—
ইত্যাদি,

(৩) বুলীয় লিপির উপকরণ ঃ

$$SP, S\bar{P}, =0, \neq 0$$

ইত্যাদি,

(৪) দেখা যাবে, মানকলিপি গঠিত হয় বাক্য-যুক্তিতে-ব্যবহৃত প্রতীক [(১)-এর অন্তর্ভুক্ত প্রতীক] আর
$a, b, c \cdots ; F, G, H \cdots ; x, y \cdots ; \exists x$, U$x$
ইত্যাদি দিয়ে

এখানে আর দু একটা সংকেতলিপির কথা বলে নিই। আমরা জানি, চতুর্বর্গ পরিকল্পনায় বাক্য গঠিত হয় ঃ দুটি জাতিবাচক পদ আর

All—are—, Some—are—, No—are—, Some—are not—

এ পদযোজকগুলির কোনো-না-কোনোটি দিয়ে। কোনো কোনো আধুনিক যুক্তিবিজ্ঞানী ইংরেজ যুক্তিবিজ্ঞানী কেইনস্-কে অনুসরণ করে এ যোজকগুলিকে অনেক সংক্ষিপ্ত আকারে ব্যক্ত করেন। তারা এ যোজকগুলির কোন্‌টির বদলে কোন্ সংক্ষেপক প্রতীক প্রয়োগ করেন, দেখ।

পদযোজক	সংক্ষেপক প্রতীক
All—are—	a
No—are—	e
Some—are—	i
Some—are not—	o

এ যোজক-সংক্ষেপক ব্যবহার করে এ সংকেতলিপিতে A, E, প্রভৃতি বাক্য কিভাবে ব্যক্ত করা হয় তা নিচের সারণী দেখলে বোঝা যাবে।

বাক্য	সংক্ষিপ্ত রূপ
All B are A	BaA
No B are A	BeA
Some B are A	BiA
Some B are not A	BoA

এ সংকেতলিপির নাম কেইন্‌সীয় লিপি।

পোলাণ্ডের যুক্তিবিজ্ঞানীরা সাধারণত পদযোজক সংক্ষেপ করেন বড় হাতের অক্ষর দিয়ে। নিচের সারণী দেখলে বুঝতে পারা যাবে, তারা কোন্ যোজকের সংক্ষেপক হিসাবে কোন্ প্রতীক ব্যবহার করেন।

পদযোজক	সংক্ষেপক প্রতীক
All—are—	A
No—are—	E
Some—are—	I
Some—are not—	O

লক্ষণীয়, এখানে বড় হাতের A, E, প্রভৃতি অনপেক্ষ বাক্যের নাম নয়, এগুলি যোজকের সংক্ষেপক।

যে সংকেতলিপির কথা এখন বলতে যাচ্ছি সে লিপিতে প্রথমে লেখা হয় যোজক, তারপর (ছোট হাতের অক্ষরে) উদ্দেশ্য পদ আর বিধেয় পদ।

নিচের সারণীটি দেখলে বুঝতে পারবে, যে লিপির কথা বলছি সে লিপিতে A, E, I, O কিভাবে ব্যক্ত করা হয়।

বাক্য	সংক্ষিপ্ত রূপ
All B are A	Aba
No B are A	Eba
Some B are A	Iba
Some B are not A	Oba

এ সংকেতলিপির নাম পোলীয় লিপি।

বলা বাহুল্য, কেইনসীয় লিপি ও পোলীয় লিপির সুবিধা হল—এসব লিপিতে,

A, E প্রভৃতি বাক্যের আকার দেখানো যায় বা বাক্য সংকেতায়িত করা যায় অনেক সংক্ষেপে। যথা

All philosophers are wise

সংকেতায়িত করতে পারি এভাবে

PaW

বা এভাবে

Apw

স্পষ্টতই এখানে P আর p হল "philosophers"-এর, W আর w হল "wise"-এর সংক্ষেপক প্রতীক।

বুলীয় লিপিতে A, E, I, O কি করে ব্যক্ত করা হয় তা তোমাদের মনে থাকার কথা। যদি না থাকে তাহলে নিচের সারণীটি দেখ।

	বুলীয় রূপ
All B are A	$B\bar{A}=0$
No B are A	$BA=0$
Some B are A	$BA\neq0$
Some B are not A	$B\bar{A}\neq0$

মানকলিপি প্রসঙ্গে বিশেষ করে ওঠে বুলীয় লিপির কথা। কেননা যে সাত্তিকতা ভাষ্য* আশ্রয় করে বুলীয় লিপি গড়ে উঠেছে ঠিক সে ভাষ্য (বুলীয় ভাষ্য) আশ্রয় করে গড়ে উঠেছে মানকলিপি।

* Existential Interpretation, সাত্তিকতাসংক্রান্ত ভাষ্য। কোনো সার্বিক বা আংশিক বাক্যের অন্তর্ভুক্ত পদ সত্ত্বাচক (সাত্তিক) বলে গণ্য, কি সত্ত্বাচক বলে গণ্য নয়—সে সম্পর্কে মতামত। বুলীয় ভাষ্য অনুসারে: আংশিক বাক্যের পদগুলি সত্ত্বাচক বলে গণ্য, কিন্তু সার্বিক বাক্যের পদগুলি সত্ত্বাচক বলে গণ্য নয়।

২

ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য

১. ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যের বিশ্লেষণ

যে বাক্যে কোনো ব্যক্তি সম্পর্কে উক্তি করা হয়, বলা হয়— অমুক ব্যক্তি এমন বা এমন নয়, অমুক ব্যক্তিতে তমুক ধর্ম আছে বা নেই— তাকে বলে ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য। নিম্নোক্ত বাক্যগুলি লক্ষ কর।

রাম বুদ্ধিমান	Socrates *is wise*
এটা একটা বাক্য	2 *is a prime number*
কলকাতা একটা সহর	Bombay *is a big city*
শ্যাম হাসছে	Shila *smiles*
যদু আস্তে কথা বলে	She *dances gracefully*
মধু জার্মান জানে	Today *is Monday*
৩ একটা বিজোড় সংখ্যা	Gautama *is a Naiyayika*
ফ্রেগে মানকলিপির জনক	*p* ∨ ∼*p is a tautology*

এগুলি (ভাববাচক) ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য। লক্ষণীয়, বাক্যগুলির প্রত্যেকটিকে দু অংশে ভাগ করা যায়। এক অংশ (এখানে, প্রথম অংশ) হল এমন শব্দ বা শব্দসমষ্টি যা ব্যক্তিবোধক। আর এক অংশ—এমন শব্দ বা শব্দসমষ্টি যা দিয়ে কোনো ব্যক্তিতে কোনো ধর্ম আরোপ করা হয়। প্রথম প্রকারের শব্দ বা শব্দসমষ্টিকে বলে ব্যক্তিবাচক পদ, আর দ্বিতীয় প্রকারের শব্দ বা শব্দসমষ্টিকে বলে বিধেয় পদ। স্পষ্টতই বাংলা উদাহরণগুলিতে প্রথম শব্দটি ব্যক্তিবাচক পদ, আর বাকি অংশ বিধেয় পদ ; ইংরেজি উদাহরণগুলিতে হেলানো-অক্ষরে-লেখা অংশ বিধেয় পদ, আর বাকি অংশ ব্যক্তিবাচক পদ। দেখা গেল, ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য গঠিত হয় ব্যক্তিবাচক পদ আর বিধেয় পদ দিয়ে।

এটা সহজবোধ্য যে, "ব্যক্তি" (individual) বলতে কেবল মনুষ্যব্যক্তি বোঝায় না, বোঝায় যেকোনো বিশেষ : বস্তু, স্থান, কাল, সংখ্যা ইত্যাদি ; যথা, ঐ বাক্যটি একটি ব্যক্তি, ৩ সংখ্যাটি একটি ব্যক্তি। ব্যক্তিবাচক পদের প্রকৃষ্ট উদাহরণ হল স্বীয় নাম (proper name) ; কিন্তু সর্বনাম—'এটা', 'ওটা', 'সে' এসবও— ব্যক্তিবাচক।

বিধেয় পদ ধর্মবোধক, বিধেয় পদ প্রয়োগ করে কোনো ব্যক্তিকে কোনো ধর্মে বিশেষিত করা হয়। 'ধর্ম' কথাটি ব্যাপক অর্থে নিতে হবে ; 'ধর্ম' বলতে বুঝতে হবে :

ব্যক্তির গুণ, অবস্থা, সম্বন্ধ* । যথা, ইংরেজি উদাহরণগুলির তৃতীয় বাক্যে বলা হয়েছে : বোম্বাই নামক ব্যক্তিতে আছে being a big city ধর্মটি, চতুর্থ বাক্যে বলা হয়েছে : শীলাতে আছে being in a smiling state ধর্মটি। বিধেয় পদ কি রকম বিচিত্র রূপ গ্রহণ করতে পারে কয়েকটি উদাহরণে তা দেখানো হল।

Shila smiles	verb
She dances gracefully	verb+adverb
Ela speaks English	verb+noun
Socrates is wise	copula+adjective
Socrates is a Greek	copula+noun phrase

উপরোক্ত বিশ্লেষণের সঙ্গে গতানুগতিক-যুক্তিবিজ্ঞান-অনুমোদিত বিশ্লেষণের পার্থক্য লক্ষ কর।

গতানুগতিক বিশ্লেষণ

উদ্দেশ্য	সংযোজক	বিধেয়
Socrates	is	a philosopher
Socrates	is	wise

বিধেয়-যুক্তিবিজ্ঞান-সম্মত বিশ্লেষণ

ব্যক্তিবাচক পদ	বিধেয় পদ
Socrates	is a philosopher
Socrates	is wise

লক্ষণীয়, দ্বিতীয় প্রকারের বিশ্লেষণ অনুসারে ব্যক্তিবাচক বাক্যের দু অংশ (তিন অংশ নয়)। আরও লক্ষণীয়,

দ্বিতীয় প্রকারের বিশ্লেষণে "উদ্দেশ্য" কথাটির উল্লেখ নেই। এটা খুব তাৎপর্যপূর্ণ। এর তাৎপর্য পরে বোঝা যাবে।

২. ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যের সাংকেতিক রূপ : নাম ও বিধেয় অক্ষর

ব্যক্তিবাচক পদ ও বিধেয়ের জায়গায় সংক্ষেপক প্রতীক ব্যবহার করে কিভাবে ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যকে সংকেতায়িত করতে হয়—এখন তাই বলা হবে।

> ব্যক্তিবাচক পদটি যদি স্বীয় নাম হয় তাহলে নামটির আদ্যাক্ষরের অনুষঙ্গী ছোট হাতের অক্ষর দিয়ে পদটি সংকেতায়িত করা হয়।

* সম্বন্ধও ধর্ম বলে গণ্য। যথা, রাম শ্যামের পিতা, রমা শ্যামকে ভালবাসে—এ সব বাক্যে '-এর পিতা', "ভালবাসে" প্রভৃতিও ধর্মবোধক। "-এর পিতা", "ভালবাসে" প্রভৃতিও বিধেয় পদ বলে গণ্য।

যথা, এ রীতি অনুসারে

Boole is a logician = b is a logician

Frege is a mathematician = f is a mathematician

আর যে ব্যক্তিবাচক পদ স্বীয় নাম নয় সেগুলির জায়গায় সংক্ষেপক হিসাবে a, b, c, d ইত্যাদি ব্যবহার করা হয়।

যথা, এ রীতি অনুসারে

this is a fish = a is a fish

that is a mammal = b is a mammal

আবার, খুশীমত-দেওয়া নাম, নির্বাচিত নাম, বানানো নাম, মেকি নাম বা অনেকার্থক নাম* হিসাবেও $a, b, c,$ ইত্যাদি ব্যবহার করা হয়।

ধর,

Somebody is wise

এ বাক্যটির মানে ব্যাখ্যা করতে হবে। এ রকম ক্ষেত্রে আমরা বলব : এ বাক্যের বক্তব্য হল—অন্তত এক ব্যক্তি জ্ঞানী। কে জ্ঞানী তা বলা হয় নি। বলা হয়েছে, কোনো এক ব্যক্তি জ্ঞানী, মানে—হয় রাম জ্ঞানী অথবা শ্যাম জ্ঞানী অথবা যদু জ্ঞানী অথবা······। এ কথাটা এ ভাবেও বলতে পারি—এ বাক্যের বক্তব্য হল :

a is wise <u>or</u> b is wise <u>or</u> c is wise <u>or</u> d is wise <u>or</u> ······

এখানে $a, b, c,$ ইত্যাদি হল বানানো নাম, মেকি নাম বা অনেকার্থক নাম। সেরকম

Everything is material

এ বাক্যের অর্থ ব্যাখ্যা করতে গিয়ে বলতে পারি : সব কিছুই জড়; দেখ এটা জড়, ওটা জড় এবং ··· । কথাটা এ ভাবেও বলা যায় : এ বাক্যের বক্তব্য হল—

a is material <u>and</u> b is material <u>and</u> c ······

আমরা দেখেছি, আলোচ্য রীতিতে সাধারণ ভাষার কোনো ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য সংকেত লিপিতে অনুবাদ করতে হলে, সাধারণ বাক্যটির অন্তর্ভুক্ত ব্যক্তিবাচক শব্দটির আদ্যাক্ষর নিয়ে ব্যক্তিবাচক পদটি সংক্ষেপিত, সংকেতায়িত, করা হয়। এখন, যুক্তিবিজ্ঞানে সাধারণ ভাষার বিশেষ স্থান নেই। যুক্তিবিজ্ঞানীরা সাংকেতিক ভাষাতে যুক্তিবৈজ্ঞানিক কাজ করেন—যথা যুক্তিবৈজ্ঞানিক সূত্র, পরীক্ষা পদ্ধতি, প্রমাণ পদ্ধতি, এসব ব্যাখ্যা করেন। এসব কাজে ব্যক্তি-বাচক পদ হিসাবে ব্যবহার করেন : $a, b, c,$ ইত্যাদি অক্ষর। কাজেই বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানে এসব অক্ষর দেখলেই বুঝতে হবে, অক্ষরগুলি ব্যক্তিবাচক। এখন,

---

* বানানো নাম – arbitrarily selected name
মেকি নাম – pseudo-name
অনেকার্থক নাম – ambiguous name

ব্যক্তিবাচক পদের সংক্ষেপিত রূপকেও বলে নাম*। আর নাম হিসাবে বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানে ব্যবহার করা হয়

$a, b, c, d, \ldots\ldots$ (u, v, w, x, y, z নয়)

আলোচ্য রীতিতে সাধারণ-ভাষার বাক্যের বিধেয় পদ সংক্ষেপিত করা হয় বিধেয় পদের অন্তর্গত কোনো শব্দের, বিশেষ্য বা ক্রিয়াপদের আদ্যক্ষর নিয়ে, অক্ষরটির অনুষঙ্গী বড়হাতের অক্ষর ব্যবহার করে। এ রীতিতে

Socrates is wise = Socrates W
This argument is valid = This argument V

সাধারণ ভাষার বাক্যের "অনুবাদকরণ" ছাড়া অন্য যুক্তিবৈজ্ঞানিক কাজে সাধারণভাবে বিধেয় হিসাবে ব্যবহৃত হয়

$A, B, C \cdots \cdots F, G, H \cdots$

প্রভৃতি অক্ষর। এখন

বিধেয় পদের সংক্ষেপিত রূপকে বলে বিধেয় অক্ষর (বা, সংক্ষেপে— বিধেয়)। আমরা এতক্ষণ পর্যন্ত যা শিখলাম সে অনুসারে

Socrates is wise = sW
Four is an even number = fE
She is a dictator = aD

বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানীরা কিন্তু মনে করেন ঃ সাংকেতিক ভাষায়—আগে নাম পরে বিধেয় লেখার চেয়ে, আগে বিধেয় পরে নাম লে খাসুবিধাজনক। বস্তুত ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য লিখতে গিয়ে তারা সব সময় এ ক্রম ঃ বিধেয় অক্ষর → নাম, অনুসরণ করেন। যথা, উক্ত বাক্যগুলি তারা এভাবে সংক্ষেপিত বা সংকেতায়িত করবেন ঃ

Socrates is wise = Ws
Four is an even number = Ef
She is a dictator = Da

এখন থেকে আমরা সর্বদাই এ রীতি অনুসরণ করব।

এতক্ষণ আমরা কেবল ভাববাচক ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যের কথা বললাম। উক্ত রীতি রপ্ত হলে, বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের '~' ব্যবহার করে অভাববাচক ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য সংকেতায়িত করা মোটেই কঠিন নয়। নিম্নোক্ত উদাহরণগুলি দেখ।

Socrates is not a conformist =
~ Socrates is a conformist = $\sim Cs$
This argument is not valid =
~ this argument is valid = $\sim Va$

এ রীতিতে

A is not human = $\sim Ha$
Sankara is not a Greek = $\sim Gs$

---

* নাম কথাটা এ অর্থে ব্যবহার করা হবে। তবে সাধারণ অর্থেও ব্যবহার করব। মানে, "রাম", "শ্যাম" এ সবকেও নাম বলে উল্লেখ করব।

এ উদাহরণগুলি থেকে একটা শিক্ষা পাই। কেবল '$\sim$' নয়, যে কোনো সত্যাপেক্ষ যোজক— $\vee$, $\supset$, ইত্যাদি— ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যের সঙ্গে যুক্ত করা যায়। মানে, ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য নিয়ে, এদের বিভিন্ন সত্যাপেক্ষ যোজক দিয়ে যুক্ত করে, যৌগিক (সত্যাপেক্ষ) বাক্য পাওয়া যায়। ধর,

Ha = a is human
Ma = a is mortal
Ra = a is rational

এ বাক্যগুলি নিয়ে পেতে পারি

$$Ha \cdot Ma$$
$$Ha \supset Ma$$
$$\sim Ha \vee Ma$$
$$Ha \equiv Ra$$

এগুলি সত্যাপেক্ষ বাক্য। কাজেই, বলা বাহুল্য, এ জাতীয় বাক্য সম্পর্কে সত্যাপেক্ষ যুক্তিবিজ্ঞানের সব নিয়ম খাটবে। যথা, বলতে পারি

$$(Ha \cdot Ma) \leftrightarrow \sim(\sim Ha \vee \sim Ma) \qquad [DM]$$
$$(Ha \supset Ma) \leftrightarrow (\sim Ha \vee Ma) \qquad [Def \supset]$$
$$(Ha \equiv Ra) \leftrightarrow [(Ha \supset Ra) \cdot (Ra \supset Ha)] \qquad [Def \equiv]$$

৩. একব্যক্তিক বিধেয় পদ ঃ একনাম-আশ্রয়ী বিধেয়-অক্ষর

যে জাতীয় বিধেয় পদের কথা এতক্ষণ বলা হল তার নাম একব্যক্তিক বিধেয়। যে বিধেয় প্রয়োগ করে একটি ব্যক্তিতে কোনো ধর্ম আরোপ করা হয় তাকে বলে একব্যক্তিক বিধেয় পদ। কথাটা এভাবেও বলতে পারি ঃ যে বিধেয় অক্ষরের দক্ষিণে থাকে কেবল একটি নাম তাকে বলে একব্যক্তিক বিধেয় অক্ষর। যথা

Fa, Ga, Ha, Hb

এসব বাক্যে F, G, H একব্যক্তিক বিধেয় অক্ষর। কিন্তু এমন বিধেয় পদ আছে যা দিয়ে কোনো ধর্ম আরোপ করতে হলে দরকার দুটি বা তার বেশী ব্যক্তি। সম্বন্ধবাচক শব্দগুলি এ জাতীয় বিধেয় পদ। যথা

A loves B
Nine is greater than eight
Socrates is the teacher of Plato

এখানে loves, is greater than, is the teacher of বিধেয় পদ বলে গণ্য (পৃঃ ৮-এর পাদটীকা দেখ)। এ জাতীয় বিধেয় পদ প্রয়োগ করে কোনো ধর্ম আরোপ করতে হলে দরকার দুটি ব্যক্তি। কাজেই এ জাতীয় বিধেয় পদকে বলে দ্বিব্যক্তিক বিধেয় পদ। এটা

সহজবোধ্য যে দ্বিব্যক্তিক বিধেয় অক্ষরের দক্ষিণে থাকে দুটি নাম। আলোচ্য সংকেত-লিপিতে উক্তরূপ বাক্যকে কি করে সংকেতায়িত করা হয় তা নিচে দেখানো হল।

A loves B = *Lab* [loves = *L*]
Nine is greater than eight = *Gne* [is greater than = *G*]
Socrates is the teacher of Plato = *Tsp* [is the teacher of = *T*]

আবার, এমন বিধেয় পদ আছে যা ত্রিব্যক্তিক, যথা : gives, is between। লক্ষণীয়, "gives" কথাটি যে সম্বন্ধ বোঝায় তা খাটতে পারে তিনটি ব্যক্তির মধ্যে। নিম্নোক্ত বাক্য দুটি দেখ। লক্ষণীয়, এদের অন্তর্গত বিধেয় পদ ত্রিব্যক্তিক। বাক্যগুলির সাংকেতিক রূপও দেওয়া হল।

A has given this book to C = *Gabc*
[এখানে has given=*G*, A=*a*, this book=*b*, C=*c*]
Nine is between eight and ten = *Bnet*
[এখানে is between=*B*, nine=*n*, eight=*e*, ten=*t*]

বইর এ খণ্ডে আমরা ব্যস্ত থাকব এমন বাক্য ও যুক্তি নিয়ে—যাতে থাকবে কেবল একব্যক্তিক বিধেয়। পরবর্তী খণ্ডে দ্বিব্যক্তিক বিধেয়ের কথা বলা হবে। ত্রিব্যক্তিক বিধেয়ের কথা এ বইতে আর তোলাই হবে না।

বিধেয়গুলিকে একব্যক্তিক দ্বিব্যক্তিক বলে বর্ণনা করার একটা তাৎপর্য হল এই : বিধেয় মাত্রই ব্যক্তি-আশ্রয়ী, বিধেয় অক্ষর মাত্রই ব্যক্তিনাম-আশ্রয়ী, সংক্ষেপে নাম-আশ্রয়ী। তার মানে

> কোনো বাক্যে (বাক্যের সাংকেতিক রূপে) এমন কোনো বিধেয় অক্ষর থাকবে না যা নামমুক্ত, নিরালম্ব। প্রত্যেকটি একব্যক্তিক বিধেয় অক্ষর এক একটি নামের সঙ্গে যুক্ত থাকবে।

নিম্নোক্ত বাক্যগুলি লক্ষ কর।

(1) Anna is brave and honest
(2) Brown is a fool or knave

এ বাক্যগুলিকে সংকেতায়িত করব কি এভাবে ?

(১) *BHa* (২) *FKb*

না, এভাবে সংকেতায়িত করলে চলবে না। কেননা বিধেয় অক্ষর মাত্রই নামাশ্রয়ী, কিন্তু উক্ত সাংকেতিক বাক্যে *B* আর *F* নিরালম্ব, নামমুক্ত, হয়ে আছে।

আসলে উক্ত বাক্যগুলি যৌগিক বাক্য : (1) সংযৌগিক বাক্য, (2) বৈকল্পিক বাক্য।

(1) = Anna is brave · Anna is honest
(2) = Brown is a fool v Brown is a knave

কাজেই এ বাক্যগুলির সাংকেতিক রূপ হবে এ রকম

(1′) *Ba* · *Ha* (2′) *Fb* v *Kb*

কোনো বাক্যকে সংকেতলিপিতে ব্যক্ত করার সময় মনে রাখবে :

সাধারণ-ভাষার-বাক্যের বিধেয় পদের অন্তর্ভুক্ত প্রত্যেকটি সংযোগী বা বিকল্প স্বতন্ত্র বিধেয় বলে গণ্য ।*

যেমন

Calcutta is a big city

এখানে "big city"-এর big-ও বিধেয় বলে গণ্য, city-ও বিধেয় বলে গণ্য । কাজেই এ বাক্যের সাংকেতিক রূপ হবে এমন

$$Bc \cdot Cc$$

আর

Calcutta is a big industrial city

এ বাক্যটির সাংকেতিক রূপ হবে এমন

$$Bc \cdot Ic \cdot Cc$$

আর একটা উদাহরণ ।

If Calcutta is a big industrial city then
it is prosperous and over-populated

$$= (Bc \cdot Ic \cdot Cc) \supset (Pc \cdot Oc)$$

আর একটা কথা । ব্যক্তিবাচক পদ বলতে আমরা বুঝি এমন পদ যা ধর্মবোধক নয়, যা কেবল ব্যক্তিনির্দেশক । কিন্তু সাধারণ ভাষার বাক্যে এমন ব্যক্তিবাচক পদের সাক্ষাৎ পাই যার কোনো অংশ ধর্মবোধক । কেননা সাধারণ ভাষায় অনেক সময় ব্যক্তিবাচক পদ গঠন করা হয় কোনো জাতিবাচক (সুতরাং ধর্মবোধক) শব্দ নিয়ে এবং তাকে 'this', 'that' ইত্যাদি দিয়ে বিশেষিত করে ।

উদাহরণ

(১) This flower is red

(২) That picture is costly

এখানে ব্যক্তিবাচক "This flower"-এর জায়গায় a আর "That picture"-এর জায়গায় b লিখে এদের এভাবে সংকেতায়িত করা যেত :

(১)$= Ra$ (২)$= Cb$

কিন্তু এরকম ক্ষেত্রে ব্যক্তিবাচক পদটির কেবল ব্যক্তিনির্দেশক অংশ পৃথক করে নেওয়া আর এর জাতিবাচক অংশটিকে বিধেয় পদ বলে গণ্য করা সুবিধাজনক ; পরে দেখব, অনেক

* এ নিয়মের ব্যতিক্রম আছে । যেমন Anna is a good singer—এ বাক্যের good ও singer-কে স্বতন্ত্র বিধেয় হিসাবে নিলে চলবে না । বলা চলবে না : এ বাক্যের বক্তব্য হল—Anna is good and Anna is a singer, বা বলা চলবে না : এর সাংকেতিক রূপ হল—$Ga. Sa$ । এখানে good singer = good as a singer । কাজেই good singer-কে আর বিশ্লেষণ করা যাবে না ।

ক্ষেত্রে অবশ্য কর্তব্য। আর তা করতে হলে বুঝে নিতে হবে যে, এ রকম বাক্য আসলে সংযৌগিক। যথা

(১)=This is a flower · this is red [$Fa \cdot Ra$]

(২)=That is a picture · that is costly [$Pb \cdot Cb$]

সুতরাং

This flower is red = $Fa \cdot Ra$

That picture is costly = $Pb \cdot Cb$

এ অধ্যায়ের প্রথমদিকে যেসব উদাহরণ দেওয়া হয়েছিল তার মধ্যে ছিল এ বাক্য দুটি

(৩) This argument is valid

(৪) Four is an even number

এবং এদের সাংকেতিক রূপ দেওয়া হয়েছিল এভাবে

(৩) = Va (৪) = Ef

এখন নিশ্চয়ই বুঝেছ, এদের সাংকেতিক রূপ দিতে হবে এভাবে ঃ

This argument is valid = $Aa \cdot Va$

Four is an even number = $Nf \cdot Ef$

(১)—(৪)-এর মত বাক্যকে সংকেতলিপিতে ব্যক্ত করতে হলে আমরা সাধারণভাবে এ রকম বিশদভাবে এদের সংকেতায়িত করব। পরে দেখব, সব সময় এমন বিশদভাবে সংকেত করণের প্রয়োজন হয় না।

৪. মুক্ত বাক্য ও নামগ্রাহক ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যের (বচনের) আকার

মুক্ত বাক্যের সঙ্গে আমাদের পরিচয় হয়েছে স্কুলে নিচের ক্লাসে। ওখানে আমাদের এ রকম কাজ করতে বলা হত ঃ

নিম্নোক্ত বাক্যগুলির শূন্যস্থান পূর্ণ কর—

—is singing

—are singing

ড্যাসযুক্ত এ রকম বাক্য হল মুক্ত বাক্য। আমরা আবার মুক্ত বাক্যের কথা বলব। বলব একটু বিশদভাবে। প্রথমে কয়টি ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য নেওয়া যাক।

(১) Aristotle is wise

Buddha is wise

Confucius is wise

Daniel is wise

Ezekiel is wise

এ বাক্যগুলির আকারগত সাদৃশ্য লক্ষণীয়। লক্ষ কর, প্রত্যেকটি বাক্যে একই বিধেয়,

আর বিভিন্ন বাক্যে ভিন্ন ভিন্ন নাম। অভিন্ন বিধেয়টি বজায় রেখে, এবং বিভিন্ন নামের (নাম-উপাদানের) জায়গায় ড্যাস বসিয়ে বাক্যগুলির আকার উদ্ধার করতে পারি। বলতে পারি, এদের আকার হল

(২) —is wise

(২)-এর মত বাক্যকে বলে মুক্ত বাক্য।

বলা বাহুল্য, (১)-এর অন্তর্গত প্রত্যেকটি বাক্য হল বচন—সত্য বা মিথ্যা বাক্য। (স্মরণীয় যে—যা সত্য বা মিথ্যা বলে গণ্য হতে পারে, যার সম্পর্কে সত্যতা মিথ্যাত্বের কথা ওঠে, তাই বচন।) কিন্তু (২)-সংখ্যক বাক্যটি বচন নয়, কেননা এ বাক্য সম্পর্কে সত্যতা মিথ্যাত্বের কথা ওঠে না। "Aristotle is wise"—এ বাক্য সত্য না মিথ্যা ?—সঙ্গতভাবে এ প্রশ্ন করা যায়। কিন্তু ' "—is wise"—এ বাক্য সত্য না মিথ্যা ?' অসঙ্গত, অর্থহীন প্রশ্ন।

—is wise
—is a city
—is a philosopher

এ রকম বাক্যে—মুক্ত বাক্যে—ড্যাস-এর জায়গায় কোনো যোগ্য নাম নিবেশন করলে পাওয়া যায় পূর্ণ অর্থবহ বাক্য বা বচন। এ জাতীয় বাক্যে কোথায় নাম বসালে মুক্ত বাক্য থেকে বচন পাওয়া যাবে, "—" কেবল তাই নির্দেশ করে ; "—" হল নিবেশন-স্থান নির্দেশক। এখন, নিবেশন-স্থান নির্দেশের জন্য ড্যাস ব্যবহার করার চেয়ে কোনো অক্ষর (গ্রাহক প্রতীক) যথা x, y, z ব্যবহার করা সুবিধাজনক। যেমন, "—"-এর বদলে x, y বা z ব্যবহার করে বলতে পারি (১)-এর অন্তর্ভুক্ত বাক্যগুলির আকার হল

x is wise বা
y is wise বা
z is wise

এখন থেকে ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যের আকার দেখাতে গিয়ে আমরা ড্যাস ব্যবহার না করে তার বদলে কেবল x-ই ব্যবহার করব। তাহলে (১)-এর অন্তর্গত বাক্যের আকার দেখাব এভাবে :

(২′) x is wise

ওপরে—"is wise" সম্পর্কে যা বলা হয়েছে, "x is wise" সম্পর্কেও তা বলা যাবে। যথা, বলা যাবে—(২′) বচন নয়, (২′) একটি মুক্ত বাক্য। এরকম বাক্যের অন্তর্গত x-কে বলে নামগ্রাহক। কেননা এ জাতীয় মুক্ত বাক্যের x সঙ্গতভাবে কেবল নামই গ্রহণ করতে পারে ; এরকম বাক্য থেকে বচন পেতে হলে x-এর জায়গায় নিবেশন করতে হবে কোনো নাম।

(১)-এতে ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যের যেসব দৃষ্টান্ত দেওয়া হয়েছে সেগুলি ব্যক্ত হয়েছে সাধারণ ভাষায়। আমরা ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যকে সাংকেতিক ভাষায় লিখতে শিখেছি। (১)-এর অন্তর্গত বাক্যগুলিকে সংকেতলিপিতে লিখে পাই

(১′) *Wa*, *Wb*, *Wc*, *Wd*, *We* [*a*=Aristotle
b=Buddha ইত্যাদি]

আর এদের আকার দেখাতে পারি, মুক্তবাক্য

Wx

দিয়ে। এখন ধর, দেওয়া আছে এ ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যগুলি

Ia, *Ib*, *Ic*, *Id* [*I*= is inconsistant]

এদের আকার দেখাতে পারি, মুক্তবাক্য

Ix

দিয়ে।

ওপরে যা বলা হয়েছে তার থেকে বোঝা যাবে ঃ

ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যের আকার দেখাতে হলে নামের জায়গায় নামগ্রাহক *x** বসাতে হবে, আর

মুক্তবাক্য বা বাক্যাকার থেকে বচন (ব্যক্তিবিষয়ক বচন) পেতে হলে

নামগ্রাহক *x*-এর জায়গায় কোনো যোগ্য নাম নিবেশন করতে হবে।

এভাবে কোনো মুক্তবাক্য থেকে যেসব বচন পাওয়া যায় তাদের বলে ঐ মুক্ত বাক্যের নিবেশন দৃষ্টান্ত। যথা, (১)-এর অন্তর্গত বচনগুলি *Wx*-এর নিবেশন দৃষ্টান্ত। আর মুক্তবাক্যে নাম বসিয়ে নিবেশন দৃষ্টান্ত সংগ্রহ করাকে বলে দৃষ্টান্তীকরণ বা দৃষ্টান্ত প্রদর্শন।

আমরা বলেছি, কোনো মুক্তবাক্য থেকে এর নিবেশন দৃষ্টান্ত পেতে হলে নামগ্রাহকের জায়গায় যোগ্য নাম বসাতে হবে। কিন্তু "যোগ্য" মানে কী? একটা উদাহরণ দিলেই কথাটার মানে বোঝা যাবে।

x is an even number

এ মুক্তবাক্যের দৃষ্টান্ত হিসাবে লিখতে পারি

5 is an even number

6 is an even number

এখানে '5' ও '6' যোগ্য নাম। কেননা এ নামগুলি *x*-এতে বসানোর ফলে পেয়েছি দুটি অর্থপূর্ণ বাক্য (বচন), যদিও প্রথম বাক্যটি মিথ্যা। কিন্তু ধর উক্ত মুক্ত বাক্যের নিবেশন দৃষ্টান্ত হিসাবে বলা হল ঃ

Caesar is an even number

Tajmahal is an even number

এ বাক্যগুলি অর্থহীন, কেননা being an even number—এ ধর্মটি কেবল সংখ্যা সম্পর্কেই

---

* *y*, *z*-ও ব্যবহার করা যায়। তবে আমরা সাব্যস্ত করেছি এরকম ক্ষেত্রে কেবল *x*-ই ব্যবহার করব।

প্রযোজ্য, মানুষ বা জড় বস্তু সম্পর্কে নয়। তার মানে, x is an even number—এ মুক্তবাক্যে নামগ্রাহক x কেবল কোনো সংখ্যাবাচক পদ গ্রহণ করতে পারে। এক কথায়, 'Caesar', 'Tajmahal' এখানে যোগ্য নাম নয়, x-আধারের যোগ্য আধেয় নয়। কাজেই উক্ত বাক্যগুলি x is an even number-এর নির্ভুল নিবেশন দৃষ্টান্ত নয়।

দৃষ্টান্তীকরণ বা আকার প্রদর্শনের একটা অপেক্ষাকৃত জটিল উদাহরণ নেওয়া যাক।

(৩) $[(Ha \supset Ma) \cdot Ha] \supset Ma$ [H = is human
$[(Hb \supset Mb) \cdot Hb] \supset Mb$ M = is mortal
$[(Hc \supset Mc) \cdot Hc] \supset Mc$ a, b, c ব্যক্তি বোঝাচ্ছে]

এ বচনগুলির আকার হল

(৩') $[(Hx \supset Mx) \cdot Hx] \supset Mx$

আর (৩)-এর অন্তর্গত বাক্যগুলির প্রত্যেকটি (৩')-এর নিবেশন দৃষ্টান্ত।

এবার এ বাক্যগুলি লক্ষ কর :

$$Ha \supset Mx$$
$$(Ha \cdot Hb) \supset Mx$$
$$Fx \vee (Ga \cdot Ha)$$

এ বাক্যগুলি কিন্তু ব্যক্তিবিষয়ক বচন নয়, মুক্তবাক্য। কেননা : এসব বাক্যে আছে অন্তত একটা নামগ্রাহক বা নিবেশনস্থান-নির্দেশক x, আর

যে বাক্যে থাকে অন্তত একটা নামগ্রাহক x,
সে বাক্য মুক্তবাক্য, বচন নয়।

আমরা দেখেছি, ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য সম্পর্কে বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের নিয়মগুলি খাটে।

মুক্তবাক্যের বেলায়ও বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের নিয়ম খাটে।

উদাহরণ

$Fx \supset Gx \leftrightarrow \sim Fx \vee Gx$*   [Def $\supset$]
$Fx \supset Gx \leftrightarrow \sim Gx \supset \sim Fx$ [Trans.]
$Fx \vee Gx \leftrightarrow \sim(\sim Fx \cdot \sim Gx)$ [DM]

৫. মুক্তবাক্য ও পদ : এদের সাদৃশ্য

'সত্য', 'মিথ্যা'—এ কথাগুলি আমরা প্রয়োগ করতে জানি। এখন বলব "—সম্পর্কে সত্য", "—সম্পর্কে মিথ্যা" এ কথাগুলির প্রয়োগ সম্পর্কে। এ প্রয়োগ অনুসারে বলা যায় : অমুক ব্যক্তি সম্পর্কে এ কথাটা সত্য ; যেমন, বলা যায় : রাম সম্পর্কে এ কথা সত্য যে—। আবার, এ প্রয়োগ অনুসারে বলা যায় : এ ব্যক্তি সম্পর্কে এ পদটি সত্য (বা মিথ্যা), the term—is true of—(false of—) ; যথা, মানুষ "পদটি" রাম সম্পর্কে সত্য ; শ্যাম, যদু, মধু সম্পর্কেও সত্য, কিন্তু তাজমহল সম্পর্কে মিথ্যা।

* এখানে "$\leftrightarrow$"-এর পরিধি বৃহত্তম।

মুক্তবাক্য, একদিক থেকে, পদের মত। পদ সত্য বা মিথ্যা বলে গণ্য হতে পারে না। সেরকম

মুক্তবাক্যও সত্য বা মিথ্যা বলে গণ্য হতে পারে না। যথা

x is a cat

এ মুক্তবাক্য সম্পর্কে সত্য মিথ্যার কথা ওঠে না। ধর, কোনো দিকে অঙ্গুলি নির্দেশ না করে বা চোখ বুজে কেউ বলল :

it is a cat

এ বাক্যে সর্বনাম "it" আছে, অথচ এর পূর্বগ, বৈয়াকরণ পূর্বগ (antecedent), নেই। এ বাক্যটিও 'x is a cat'-এর মত মুক্তবাক্য। এর থেকে বোঝা যাবে

মুক্তবাক্যের x হল সাধারণ ভাষার পূর্বগহীন "it"-এর অনুরূপ।

তারপর, আমরা বলি এ পদটি ঐ ব্যক্তি সম্পর্কে সত্য (বা মিথ্যা)। সেরকম বলা যায়,

এ মুক্তবাক্যটি ঐ সম্পর্কে সত্য (বা মিথ্যা)।

যথা, এ বাকভঙ্গি অনুসারে বলা যায়, 'man' পদটির মত,

x is a man

এ মুক্তবাক্যটি প্রত্যেক মানুষ সম্পর্কে সত্য, অন্য সবকিছু সম্পর্কে মিথ্যা।

x is a flower · x is red

সব লাল ফুল সম্পর্কে সত্য ; অন্য সবকিছু সম্পর্কে মিথ্যা।

x is human $\supset$ x is mortal

এ মুক্তবাক্যটি যে-কোনো ব্যক্তি সম্পর্কে সত্য ; যেকোনো (বিশেষ) বস্তু সম্পর্কে এ কথা খাটে যে—তা যদি মানুষ হয় তাহলে তা মরণশীল।

অনুশীলনী

১. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে বিধেয়লিপিতে ব্যক্ত কর।

(১) Jesus is from Galilee
(২) 2 is an even prime number
(৩) Both Adams and Brown are arrogant and discourteous
(৪) India will agree only if Bangladesh does
(৫) The argument is unconvincing even though it is valid
(৬) He will not seek re-election unless his party president does
(৭) If the argument is valid, it is not both the case that its premiss is true and the conclusion false
(৮) A Harvard professor, Willard Quine, is an outstanding logician
(৯) Norman Malcolm, who read philosophy under Wittgenstein, studied in England and teaches at Cornell University
(১০) Unless Ludwig Wittgenstein is read and studied he is not an important philosopher

(৮)—(১০) : F. R. Harrison III

(১১) The girl in the magenta dress has red hair and is either colour-blind or has bad taste
(১২) John has fair hair
(১৩) Queen Elizabeth II is a constitutional monarch
(১৪) Harry is an Indian chief.

(১১)—(১৪) : D. J. O'Connor and B. Powell

৩

জাতিবিষয়ক বাক্য

১. ভূমিকা

যে বাক্যে কোনো জাতি সম্পর্কে উক্তি করা হয়, বলা হয়—অমুক ধর্ম ঐ শ্রেণীর কোনো কোনো ব্যক্তিতে আছে বা নেই, সব ব্যক্তিতে আছে বা কোনো ব্যক্তিতে নেই—তাকে বলে জাতিবিষয়ক বাক্য। গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানের চতুর্বর্গ পরিকল্পনা আসলে জাতিবিষয়ক বাক্যেরই শ্রেণীবিভাগ। এ বিভাগ অনুসারে, জাতিবিষয়ক বাক্য চার প্রকার ঃ A, E, I, O। এদের মধ্যে A, E সার্বিক বাক্য আর I, O আংশিক বাক্য। লক্ষণীয়, I, O বাক্যও জাতিবিষয়ক (general) বাক্য।

বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানের নতুন লিপিতে—মানকলিপিতে—কি করে A, E, I, O বাক্য লিখতে হবে, এটাই এখন আমাদের আলোচ্য। এখন, যে ভাষ্যকে আশ্রয় করে বুলীয় লিপি গড়ে উঠেছে ঠিক সে ভাষ্য আশ্রয় করেই গড়ে উঠেছে মানকলিপি। বুলীয় লিপি আমাদের পরিচিত। কাজেই এ পরিচিত লিপি থেকে সুরু করে মানকলিপিতে আসা সুবিধাজনক।

২. A আর E বাক্য ঃ সার্বিক মানক

A বাক্যের উদাহরণ হিসাবে নেওয়া যাক নিয়োক্ত প্রায়শ-উদ্ধৃত দৃষ্টান্তটি।

All humans are mortals

বা সংক্ষেপে

All H are M

আমরা জানি, বুলীয় লিপিতে এ বাক্য ব্যক্ত করতে হবে এভাবে

$$H\overline{M} = 0$$

এ বাক্যের বক্তব্য

$H\overline{M}$ শ্রেণীটি শূন্য

বা $H\overline{M}$ শ্রেণীটির কোনো সভ্য নেই

বা এমন কোনো ব্যক্তি নেই যা $H\overline{M}$ শ্রেণীর সভ্য

কথাটা এভাবেও বলতে পারি

এমন কোনো ব্যক্তি নেই যা H শ্রেণীর সভ্য এবং $\overline{M}$ শ্রেণীর সভ্য

বা এমন নয় যে—কোনো ব্যক্তি H শ্রেণীরও সভ্য এবং $\overline{M}$ শ্রেণীরও সভ্য।

এখন, $\overline{M}$ শ্রেণীর সভ্য $=M$ শ্রেণীর সভ্য নয়। ধর, a হল $\overline{M}$ শ্রেণীর সভ্য। তাহলে, a হল $\overline{M}$ শ্রেণীর সভ্য $=a$ M শ্রেণীর সভ্য নয় $= \sim Ma$

বিশ্বে যে সব ব্যক্তি আছে, ধর তাদের নাম হল : a, b, c, d, e ইত্যাদি, ইত্যাদি। তাহলে, $H\overline{M}=0$ বা

এমন নয় যে—কোনো ব্যক্তি H শ্রেণীর সভ্য এবং M শ্রেণীর সভ্য নয়

এ বাক্যের বক্তব্য হল

এমন নয় যে—a H-শ্রেণীর সভ্য কিন্তু (এবং) M শ্রেণীর সভ্য নয়, এবং
এমন নয় যে—b H-শ্রেণীর সভ্য কিন্তু M শ্রেণীর সভ্য নয়, এবং
এমন নয় যে—c H-শ্রেণীর সভ্য কিন্তু M শ্রেণীর সভ্য নয়, এবং
এমন নয় যে—d……
ইত্যাদি, ইত্যাদি

বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানের সংকেতলিপিতে

$$\sim(Ha \cdot \sim Ma) \cdot \sim(Hb \cdot \sim Mb) \cdot \sim(Hc \cdot \sim Mc) \cdots$$

এখন, এ বাক্যের সংযোগীগুলিকে আরও সরলভাবে ব্যক্ত করা যায়। যথা, প্রথম সংযোগীটি এভাবে সরল করা যায়

$\sim(Ha \cdot \sim Ma)$
$\sim Ha \vee \sim\sim Ma$ [DM]
$\sim Ha \vee Ma$ [DN]
$Ha \supset Ma$ [Def ⊃]

সেরূপ দ্বিতীয় সংযোগীটিকে সরল করে পাই

$$Hb \supset Mb$$

অনুরূপভাবে পাই

$Hc \supset Mc$, ইত্যাদি

তাহলে বলা যায়

All H are M বা $H\overline{M}=0$ (1)

এ বাক্যের বক্তব্য হল

$(Ha \supset Ma) \cdot (Hb \supset Mb) \cdot (Hc \supset Mc) \cdot (Hd \supset Md)$ …… (2)

ওপরে যা বলা হল তার থেকে এ ধারণা হতে পারে যে, A বাক্য উক্তরূপ সংযৌগিক বাক্যের সমার্থক. A বাক্যকে উক্তরূপ সংযৌগিকে ব্যক্ত করা যায়। এ ধারণা কিন্তু ঠিক নয়। যথা, (1) আর (2) সমার্থক নয়। কেননা, আলোচ্য বিশ্লেষণ অনুসারে,

(1)-এর বক্তব্য হল : প্রত্যেক ব্যক্তি সম্পর্কে বলা যায়,
ব্যক্তিটি মানুষ হলে মরণশীল

কিন্তু (2)-এতে বলা হয়েছে :

a সম্পর্কে বলা যায়, a মানুষ হলে a মরণশীল
b সম্পর্কে বলা যায়, b মানুষ হলে b মরণশীল

c সম্পর্কে বলা যায়, c ......

d সম্পর্কে ......

কিন্তু বিশ্বে কেবল a, b, c, d নেই ; আরও লক্ষকোটি, অগণন, ব্যক্তি আছে। কাজেই সব ব্যক্তির কথা বলা না হলে, উক্তরূপ সংযৌগিকের "......"-এর জায়গাটা যতক্ষণ পূরণ করতে না পারছি ততক্ষণ, বলা যাবে না, (2) হল (1)-এর সমার্থক। দেখা গেল, এ কথা বলা যায় না যে, A বাক্য আসলে

$(— \supset —) \cdot (— \supset —) \cdot (— \supset —) \ldots\ldots$

আকারের সংযৌগিক বাক্য। তবে এ কথা বলা যায় যে

A বাক্য হল অসীমিত সংযৌগিক (infinite conjunction)।

আমাদের সমস্যাটা কিন্তু থেকেই গেল। A বাক্যকে মানকলিপিতে ব্যক্ত করব কি করে ? আমরা দেখেছি, $H\bar{M} = 0$ এ বাক্যে যে অসংখ্য ব্যক্তির কথা বলা হয়, যে অসংখ্য "$— \supset —$" আকারের ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যের সত্যতা দাবী করা হয়, সেগুলি এরূপ

$$Ha \supset Ma$$
$$Hb \supset Mb$$
$$Hc \supset Mc$$
$$\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

এদের আকার দেখাতে পারি এভাবে

$$Hx \supset Mx$$

এবং বলতে পারি উক্তরূপ-ব্যক্তিবিষয়ক-বাক্য-দিয়ে-গঠিত অসীমিত সংযৌগিকের, মানে

$(Ha \supset Ma) \cdot (Hb \supset Mb) \cdot (Hc \supset Mc) \cdots$

বা All H are M

বা $H\bar{M} = 0$

-এর বক্তব্য হল

$Hx \supset Mx$ এ মুক্তবাক্য যেকোনো ব্যক্তি সম্পর্কে সত্য

x যাই হোক না কেন, x সম্পর্কে এ কথা সত্য যে $Hx \supset Mx$

$Hx \supset Mx$ is true of each thing x (whatever x is)

Of each thing x it is true that $Hx \supset Mx$

বা আরও সংক্ষেপে

Anything x is such that $Hx \supset Mx$

For any x, $Hx \supset Mx$

"For any x"-এর সংক্ষেপক হিসাবে যদি Ux লেখা সাব্যস্ত করি তাহলে আলোচ্য বাক্যটি এভাবে লিখতে পারি

$$Ux\,(Hx \supset Mx)$$

বস্তুত বিদেশের যুক্তিবিজ্ঞানে "For any x", "Anything x is such that" ইত্যাদির সংক্ষেপক হিসাবে Ux লেখা হয়। আর .

Ux-কে বলে সার্বিক মানক (universal quantifier)।

ওপরে All H are M সম্বন্ধে যা বললাম তার থেকে বোঝা যাবে, মানকলিপিতে

All S are P

-কে ব্যক্ত করতে হবে এভাবে :

$$Ux\ (Sx \supset Px)$$

আমরা A বাক্যকে মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে শিখেছি। কাজেই আমাদের E বাক্যকেও মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে পারার কথা। কেননা E বাক্যকে (প্রতিবর্তন করে) সমার্থক A-তে রূপান্তরিত করা যায়, আর A বাক্যকে কি করে মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে হয় তা আমাদের জানা। একটা উদাহরণ।

No statesmen are poor

সংক্ষেপে

No S are P

এ বাক্যটিকে প্রতিবর্তন করে পাই সমার্থক A বাক্য :

All S are $\bar{P}$

A বাক্যের যে বিশ্লেষণ দেওয়া হয়েছে সে বিশ্লেষণ অনুসারে উক্ত বাক্যটির বক্তব্য হল :

Anything x is such that if x is S (statesman)
then x is non-P (non-poor)

For any x, $Sx \supset \sim Px$

আর প্রস্তাবিত সংকেতলিপিতে এ বাক্যগুলি ব্যক্ত করতে হবে এভাবে

$$Ux\ (Sx \supset \sim Px)$$

আর একটা উদাহরণ।

No humans are perfect ↔
All humans are non-perfect =
All H are $\bar{P}$ =
$Ux\ (Hx \supset \sim Px)$

মনে রাখবে

All S are $P = Ux\ (Sx \supset Px)$
No S are $P = Ux\ (Sx \supset \sim Px)$

৩. I আর O বাক্য : সাত্তিক মানক

I বাক্যের উদাহরণ হিসাবে নাও

Some men are wise

—এ বাক্যটি। আমরা জানি, বুলীয় লিপিতে এ বাক্য ব্যক্ত করতে হবে এভাবে

$$MW \neq 0$$

শেষোক্ত বাক্যটির বক্তব্য হল

MW শ্রেণীটি শূন্য নয়
MW শ্রেণীর সভ্য আছে
বা MW শ্রেণীর অন্তত একটা সভ্য আছে।

এ কথাটা এভাবেও বলতে পারি

এমন ব্যক্তি (অন্তত একটি ব্যক্তি) আছে যা MW শ্রেণীর সভ্য
এমন ব্যক্তি আছে যা M শ্রেণীর সভ্য এবং W শ্রেণীর সভ্য।

কোন্ বা কোন্ কোন্ ব্যক্তি M শ্রেণীর সভ্য আবার W শ্রেণীরও সভ্য তা আলোচ্য বাক্যে বলা হয় নি, কেবল বলা হয়েছে ঃ অন্তত এক ব্যক্তি উক্ত শ্রেণী দুটির সভ্য, মানে অমুক ব্যক্তি ঐ শ্রেণী দুটির সভ্য অথবা তমুক ব্যক্তি···অথবা··· ।

বিশ্বে যেসব ব্যক্তি আছে, ধর, তাদের নাম হল ঃ a, b, c, d, e ইত্যাদি, ইত্যাদি।

তাহলে $MW \neq 0$, বা

এমন ব্যক্তি আছে যা M শ্রেণীরও সভ্য W শ্রেণীরও সভ্য

এ বাক্যের বক্তব্য হল

a M-শ্রেণীর সভ্য এবং a W-শ্রেণীর সভ্য, অথবা
b M-শ্রেণীর সভ্য এবং b W-শ্রেণীর সভ্য, অথবা
c M-শ্রেণীর······

বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানের সংকেতলিপিতে

$$(Ma \cdot Wa) \vee (Mb \cdot Wb) \vee (Mc \cdot Wc) \vee (Md \cdot Wd) \vee \cdots$$

ওপরে যা বলা হল তার থেকে এ ধারণা হতে পারে যে, I বাক্য উক্তরূপ বৈকল্পিক বাক্যের সমার্থক, I বাক্যকে উক্তরূপ বৈকল্পিকে ব্যক্ত করা যায়। এ ধারণা কিন্তু ঠিক নয়। যথা

Some M are W বা $MW \neq 0$* (1)

আর $(Ma \cdot Wa) \vee (Mb \cdot Wb) \vee (Mc \cdot Wc) \vee (Md \cdot Wd) \vee \cdots$ (2)

এ বাক্য দুটি সমার্থক নয়। (2)-এতে বলা হয়েছে* ঃ a মানুষ-এবং-জ্ঞানী ; অথবা b মানুষ-এবং-জ্ঞানী, অথবা c মানুষ-এবং-জ্ঞানী, অথবা d মানুষ-এবং-জ্ঞানী, অথবা ···। কিন্তু (1)-এতে বলা হয়েছে বিশ্বের লক্ষকোটি ব্যক্তির মধ্যে অন্তত এক ব্যক্তি মানুষ-এবং-জ্ঞানী (সে ব্যক্তি বা ব্যক্তিগুলি কে, বা কে কে, তা কিন্তু বলা হয় নি)। কাজেই সব ব্যক্তির কথা বলা না হলে, মানে উক্তরূপ বৈকল্পিকের "······"-এর জায়গাটা যতক্ষণ পূরণ করতে না পারছি ততক্ষণ, বলা যাবে না, (2) হল (1)-এর সমার্থক। দেখা গেল, এ কথা বলা যায় না যে, I বাক্য হল আসলে

$$(— \cdot —) \vee (— \cdot —) \vee (— \cdot —) \vee (— \cdot —) \vee \cdots$$

আকারের বৈকল্পিক বাক্য। তবে এ কথা বলা যায় যে

I বাক্য হল অসীমিত বৈকল্পিক (infinite alternation)

আমাদের সমস্যাটা কিন্তু থেকেই গেল। I বাক্যকে নতুন লিপিতে ব্যক্ত করব কি করে ? আমরা দেখেছি, $MW \neq 0$—এ বাক্যে যে অসংখ্য ব্যক্তির কথা বলা হয়, যে অসংখ্য

* এখানে "Some M are W" হল "Some men are wise"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ

"— · —" আকারের ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যের অন্তত একটার সত্যতা দাবী করা হয়, সেগুলি এরূপ

$$Ma \cdot Wa$$
$$Mb \cdot Wb$$
$$Mc \cdot Wc$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

এসব বাক্যে সাধারণভাবে যা বলা হয় তা বলতে পারি, এদের আকার দেখাতে পারি, এভাবে

$$Mx \cdot Wx$$

এবং এখন বলতে পারি $MW \neq 0$-এর বক্তব্য হল :

$Mx \cdot Wx$—এ মুক্তবাক্য অন্তত একটি ব্যক্তি সম্পর্কে সত্য
'$Mx \cdot Wx$' is true of at least one thing x
Of at least one thing x, it is true that $Mx \cdot Wx$
There exists at least one x such that $Mx \cdot Wx$

বা সংক্ষেপে

There is an x such that $Mx \cdot Wx$

এখন, "There is an x such that"-এর সংক্ষেপক হিসাবে যদি $\exists x$ লেখা সাব্যস্ত করি তাহলে সর্বশেষ বাক্যটি এভাবে লিখতে পারি

$$\exists x\,(Mx \cdot Wx)$$

বস্তুত বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানে "There is an x such that"-এর সংক্ষেপক হিসাবে $\exists x$ লেখা হয়। আর

$\exists x$কে বলে সাত্তিক মানক (existential quantifier)

ওপরে 'Some M are W' সম্বন্ধে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে, বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানে

Some S are P

আকারের বাক্যকে মানকলিপিতে ব্যক্ত করা হয় এভাবে

$$\exists x\,(Sx \cdot Px)$$

আমরা I বাক্যকে মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে শিখেছি। আমরা দেখেছি

Some S are $P = \exists x\,(Sx \cdot Px)$

কাজেই আমাদের O বাক্যকেও মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে পারার কথা। কেননা O বাক্যকে (প্রতিবর্তন করে) সমার্থক I-এতে রূপান্তরিত করা যায়, আর I বাক্যকে কি করে মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে হয় তা আমাদের জানা। একটা উদাহরণ

Some soldiers are not patriots

সংক্ষেপে

Some S are not P

এ বাক্যটিকে প্রতিবর্তন করে পাই সমার্থক I বাক্য :

Some S are $\overline{P}$

I বাক্যের যে বিশ্লেষণ দেওয়া হয়েছে সে বিশ্লেষণ অনুসারে উক্ত বাক্যটির বক্তব্য হল

There is an x such that x is S (soldier)
and x is not P (patriot)

There is an x such that $Sx \cdot \sim Px$

আমরা জানি এ বাক্যগুলি সংক্ষেপে এভাবে ব্যক্ত করা হয় :

$\exists x\,(Sx \cdot \sim Px)$

আর একটা উদাহরণ।

Some men are not wise $\leftrightarrow$
Some men are non-wise =
Some M are $\overline{W}$=
$\exists x\,(Mx \cdot \sim Wx)$

মনে রাখবে

Some S are P = $\exists x\,(Sx \cdot Px)$
Some S are not P = $\exists x\,(Sx \cdot \sim Px)$

৪. Some—
At least one—

Some F are G

-এর সাংকেতিক রূপের কথা বলতে গিয়ে আমরা বলেছি, এ বাক্যের বক্তব্য হল

There is a thing x such that $Fx \cdot Gx$
There is something which is F and G

বা At least one thing is F and G

স্পষ্টতই আমরা some কথাটি নিয়েছি at least one অর্থে। কিন্তু সাধারণ ভাষায় সাধারণভাবে some এ অর্থে ব্যবহৃত হয় না, এ আকারের বাক্যে বহুত্বের ইঙ্গিত থাকে। যথা

Some student*s* *are* intelligent
[Some thing*s* *are* students and intelligent]

এ উক্তি করলে সাধারণভাবে ধরে নেওয়া হয় যে, অনেক ছাত্রের কথা বলা হচ্ছে। যদি জানা থাকে যে, কেবল একজন বা দু একজন ছাত্র বুদ্ধিমান তাহলে আমরা Some...... আকারের উক্তি করি না। তার মানে, সাধারণ ভাষায় some বলতে বোঝায় অনেক। কিন্তু যুক্তিবিজ্ঞান-স্বীকৃত ব্যবহার অনুসারে

A thing is F and G
There is a thing which is F and G
There is something which is F and G
Something i*s* F and G

এ (সমার্থক) বাক্যগুলির প্রত্যেকটি নিম্নোক্ত বাক্যের সমার্থক :

Some *things are F* and *G*

এ বাক্যের some things এবং are লক্ষণীয়। স্পষ্টতই some এখানে বহুত্ববোধক। কিন্তু উক্ত বাক্যগুচ্ছের কোনোটিতে বহুত্বের ইঙ্গিত নেই। প্রশ্ন হল, সাধারণ ভাষার বহুত্ববোধক some-কে আমরা at least one অর্থে ব্যবহার করব কেন ? এ কথা কেন বলব যে

Some *F* and *G*

-এর বক্তব্য হল

At least one thing is *F* and *G* ?

উত্তর

সাধারণভাবে মেনে নেওয়া হয় যে *Isp* আর *Esp* বিরুদ্ধ বাক্য। তার মানে, এদের সম্বন্ধ এমন :

Isp	*Esp*
T	*F*
F	*T*

এখানে *T* "সত্য"-এর আর *F* "মিথ্যা"-এর সংক্ষেপক। কিন্তু যদি মনে করা হয় যে—some মানে অনেক, একাধিক, তাহলে *Isp* আর *Esp*-এর মধ্যে উক্ত সম্বন্ধ খাটে না। কেন খাটে না, দেখ। একটা উদাহরণ।

Some swans are red No swans are red

এ বাক্য দুটিকে বিরুদ্ধ বাক্য বলে গণ্য করা হয়। ধরা যাক, এখানে some মানে একাধিক—more than one। প্রথম বাক্যটির some-এর জায়গায় More than one লিখে যে বাক্য পাই তার সঙ্গে দ্বিতীয় বাক্যটির কী সম্বন্ধ, দেখ।

(1) More than one swan is red	(2) No swans are red
T	*F*
F	?

অবশ্যই (1) সত্য হলে (2) মিথ্যা। কিন্তু (1) মিথ্যা হলে ? দেখা যাবে, (1) মিথ্যা হলে (2) অনিশ্চিত—সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে। ধরা যাক, More than one swan বলতে এখানে দুটি হাঁস—*a*, *b*—বোঝাচ্ছে। তাহলে (1) সম

$$(1') \quad (Sa \cdot Ra) \cdot (Sb \cdot Rb)$$

[*S* = is a swan
R = is red]

এখন, এ বাক্য মিথ্যা হতে পারে দুটি শর্তে : (i) *a*, *b* এদের কোনোটি লাল নয়, (ii) এদের একটি লাল, অন্যটি লাল নয় (যথা, যদি এমন হয় যে $Sa \cdot Ra$ কিন্তু $Sb \cdot \sim Rb$)।

ধরা যাক, একটি হাঁস লাল, অন্যটি অ-লাল। সেক্ষেত্রে বলা যাবে না "No swans are red" সত্য। কিন্তু

At least one swan is red	No swans are red
F	*T*

লক্ষণীয়, '"অন্তত একটা হাঁস লাল"—এ বাক্য মিথ্যা' মানে : কোনো হাঁস লাল নয়, একটাও লাল নয়।

যুক্তিবিজ্ঞানীদের সামনে ছিল দুটি বিকল্প :

(১) সাধারণ ভাষায় যে অর্থে (বহুত্ববোধক অর্থে) some ব্যবহৃত হয় সে অর্থে কথাটি নেওয়া, এবং *Isp* আর *Esp* যে বিরুদ্ধ এ নিয়ম অস্বীকার করা ;

(২) *Isp* আর *Esp* যে বিরুদ্ধ এ নিয়ম মেনে নেওয়া, এবং some এমন অর্থে (at least one অর্থে) প্রয়োগ করা—যে অর্থে প্রয়োগ করলে এ নিয়মটি বজায় থাকে।

আমরা জানি, যুক্তিবিজ্ঞানীরা দ্বিতীয় বিকল্পটি বেছে নিয়েছেন। যে উত্তরটি দেওয়া হল তা সংক্ষেপে পুনরুক্তি করতে পারি এভাবে :

> যুক্তিবিজ্ঞানীরা some-কে বহুত্ববোধক অর্থে ব্যবহার করেন না, কেননা তা করলে আর বলা যেত না *Isp* আর *Esp* বিরুদ্ধ, বা *Osp* আর *Asp* বিরুদ্ধ।*

৫. *I*-এর সংকেতকরণ সম্পর্কে সতর্কতা

All S are *P*

Some S are *P*

এ বাক্য দুটির মধ্যে বাহ্যিক আকারের দিক থেকে কেবল এ পার্থক্য—একটির আদিতে "All", অন্যটির আদিতে "Some"। কাজেই মনে হতে পারে, মানক দিয়ে এদের ব্যক্ত করতে হলে এদের মধ্যে থাকবে কেবল U*x* আর ∃*x*-এর পার্থক্য। যথা, মনে হতে পারে—মানকলিপিতে লিখলে, এদের সাংকেতিক রূপ হবে এমন

$$A: \quad \mathrm{U}x\,(Sx \supset Px)$$

$$I: \quad \exists x\,(Sx \supset Px)$$

এ ধারণা সম্পূর্ণ ভ্রান্ত। কিন্তু এ ধারণার বশবর্তী হয়ে প্রথম শিক্ষার্থীরা অনেক সময় *I*-কে উক্তরূপে ব্যক্ত করে। একটা উদাহরণ।

Some shopkeepers are honest (1)

এ বাক্যকে মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে গিয়ে, ধর, লেখা হল

$$\exists x\,(Sx \supset Hx) \qquad (2)$$

এটা একটা মারাত্মক ভুল। কেননা (1) আর (2)-এর মধ্যে আকাশ পাতাল পার্থক্য। এদের পার্থক্যটা বুঝে নাও, তাহলে কখনও আর এরকম ভুল করবে না। যদি এমন

* *I* সম্বন্ধে এবং *Isp—Esp*-এর সম্বন্ধ সম্পর্কে যা বলা হল, তা *O* সম্বন্ধে এবং *Osp—Asp*-এর সম্বন্ধ সম্পর্কেও খাটে।

হয় যে সব দোকানদারই অসাধু, তাহলে (1) স্পষ্টতই মিথ্যা। কিন্তু সব দোকানদার অসাধু হলেও (2′) সত্য হতে পারে। কেননা, (2)-এর সমার্থক হিসাবে লেখা যায়

$$\exists x\,(\sim Sx \vee Hx) \qquad (2')$$

বিশ্বে যদি এমন একটি ব্যক্তিও থাকে যা দোকানদার (S) নয় (বা এমন ব্যক্তি থাকে যা সাধু (H), তাহলে (2′), সুতরাং (2), সত্য হবে। কেননা এ বাক্যের বক্তব্য হল বস্তুত

$$(\sim Sa \vee Ha) \vee (\sim Sb \vee Hb) \vee (\sim Sc \vee Hc) \vee \cdots$$

এখন a, b, c, ইত্যাদির কোনো একটি S না হলে, বা H হলে, মানে কোনো বিকল্প সত্য হলে (2′) সত্য হবে।

$$\exists x\,(Sx \supset Px)$$

আকারের বাক্য প্রায় সর্বদাই সত্য, কদাচিৎ মিথ্যা। যেমন, উক্ত (2) সংখ্যক বাক্যটি মিথ্যা হতে পারত কেবল যদি এমন হত যে : বিশ্বের সর্বকিছু সম্পর্কে S (shopkeeper) সত্য, এবং কোনো কিছু সম্পর্কেই H (honest) সত্য নয় ; মানে, যদি এমন হত যে সর্বকিছুই দোকানদার এবং কিছুই সাধু নয়। আর একটা উদাহরণ :

Some men are fifteen-foot-tall (১)

ধর, কেউ এ বাক্য মানকলিপিতে লিখল এভাবে

$$\exists x\,(Mx \supset Fx) \qquad (২)$$

এরকম "অনুবাদ" ভ্রান্ত, কেননা (১) মিথ্যা, (২) সত্য। (১) মিথ্যা—বস্তুত এমন মানুষ নেই যে পনের ফুট লম্বা। (২) যে সত্য তা এভাবে দেখানো যায়। (২) সম

$$\exists x\,(\sim Mx \vee Fx) \qquad (২')$$

এ বাক্য সত্য হবে যদি বিশ্বে এমন একটি ব্যক্তিও থাকে যা M, মানুষ, নয়, অথবা যা F, পনের ফুট লম্বা*। বস্তুত বিশ্বে এমন বস্তু আছে যা M নয়, এমন বস্তুতও আছে যা F। সুতরাং (২′) সত্য, সুতরাং (২)-ও সত্য। যদি কেউ বলে (২) হল (১)-এর নির্ভুল অনুবাদ তাহলে বস্তুত সে এ উদ্ভট দাবী করল যে (১) সত্য।

এতক্ষণ ধরে যা বোঝাবার চেষ্টা করা হল তার মর্মার্থ হল

I-কে $\exists x\,(— \supset —)$ আকারে ব্যক্ত করলে চলবে না

I-এর নির্ভুল সাংকেতিক রূপ হবে এ আকারের বাক্য

$$\exists x(-x \cdot -x)$$

৬. $\exists x\,(— \supset —)$
$Ux\,(— \cdot —)$

আমরা বলেছি

I-এর সাংকেতিক রূপ হবে $\exists x\,(— \cdot —)$ আকারের

A-এর সাংকেতিক রূপ হবে $Ux\,(— \supset —)$ আকারের

---

*$\exists x\,(Mx \supset Fx)$ মিথ্যা হতে পারত যদি এমন হত যে বিশ্বের সবকিছু M আর $\bar{F}$। পরে দেখব : $\sim\exists x\,(Mx \supset Fx) \leftrightarrow Ux\sim(Mx \supset Fx) \leftrightarrow Ux\,(Mx \cdot \sim Fx) \leftrightarrow [Ux\,Mx \cdot Ux\sim Fx]$

বাক্য। লক্ষণীয়, আমরা এ কথা কিন্তু বলি নি যে: "— ⊃ —" আকারের মুক্ত বাক্যকে সাত্তিক-মানকিত করা যায় না, বা "— · —" আকারের মুক্ত বাক্যকে সার্বিক-মানকিত করা যায় না। বলি নি: কোনো বাক্য

$$\exists x\,(Fx \supset Gx) \qquad (১)$$

বা

$$\mathrm{U}x\,(Fx \cdot Gx) \qquad (২)$$

আকার ধারণ করতে পারে না। আমরা কেবল বলেছি, (১) *I* বাক্য নয়, *Ifg*-এর সাংকেতিক রূপ নয়; আর (২) *A* বাক্য নয়, *Afg*-এর সাংকেতিক রূপ নয়।

ধর,

$Mx = x$ হল চিদণু

$Ix = x$ হল অবিভাজ্য

এবং ধর, আমাদের বক্তব্য হল

এমন বস্তু আছে যা চিদণু হলে অবিভাজ্য

এ বাক্যের সাংকেতিক রূপ হবে এমন:

$$\exists x\,(Mx \supset Ix)$$

এবার নাও এ বাক্যটি

সব কিছু চিদণু ও অবিভাজ্য

স্পষ্টতই এর সাংকেতিক রূপ হবে

$$\mathrm{U}x\,(Mx \cdot Ix)$$

পৃঃ ২৮ দেখ, ওখানে আমরা

$\exists x\,(Fx \cdot Gx)$ $\qquad$ $\exists x\,(Fx \supset Gx)$

এর পার্থক্য ব্যাখ্যা করেছি। এবার

$\mathrm{U}x\,(Fx \supset Gx)$ $\qquad$ $\mathrm{U}x\,(Fx \cdot Gx)$

-এর পার্থক্যের কথা।

যদি কোনো কিছু *F* না হয় তাহলে বাম ধারের বাক্যটি সত্য, ডান ধারেরটি মিথ্যা: কেননা প্রথম বাক্যটির বক্তব্য

$$(Fa \supset Ga) \cdot (Fb \supset Gb) \cdot (Fc \supset Gc) \cdots\cdots \qquad (1)$$

আর দ্বিতীয়টির

$$(Fa \cdot Ga) \cdot (Fb \cdot Gb) \cdot (Fc \cdot Gc) \cdots\cdots\cdots \qquad (2)$$

এখন, *a*, *b*, *c* ইত্যাদি কোনো কিছুই যদি *F* না হয়, মানে যদি এমন হয় যে *Fa*, *Fb*, *Fc* ইত্যাদি মিথ্যা তাহলে (1) সত্য, সুতরাং $\mathrm{U}x\,(Fx \cdot Gx)$ সত্য; আর (2) মিথ্যা, সুতরাং $\mathrm{U}x\,(Fx \cdot Gx)$ মিথ্যা।

৭. মানকলিপিতে একবিধেয়ক বাক্য

গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানের বিশ্লেষণ অনুসারে A, E, I, O আকারের প্রত্যেক বাক্যে একটি বিধেয় (ও একটি উদ্দেশ্য)। মানকলিপির কথা বলতে গিয়ে এসব

বাক্যের যে বিশ্লেষণ দেওয়া হয়েছে সে বিশ্লেষণ অনুসারে
গতানুগতিক A, E, I, O বাক্যের প্রত্যেকটিতে
দুটি বিধেয় পদ বা বিধেয় অক্ষর

যথা

Some flowers are red

এ বাক্যে flower-ও বিধেয় পদ, red-ও বিধেয় পদ বলে গণ্য।

Some F are R

এ বাক্যে F এবং R বিধেয় অক্ষর।

এখন আমরা এমন বাক্যের সংকেতকরণের কথা বলব, যাতে কেবল একটি বিধেয় পদ। এ জাতীয় কয়টি বাক্য নিয়ে এদের সাংকেতিক রূপ দেখানো হল।

Everything is spiritual =
Everything x is such that x is spiritual = $UxSx$
Everything is an idea = $UxIx$
Everything is in flux = $UxFx$
Nothing is material ↔ Everything is non-material = $Ux \sim Mx$
Nothing is static = $Ux \sim Sx$
There are no ghosts ↔ Everything is non-ghost = $Ux \sim Gx$
Ghosts do not exist = $Ux \sim Gx$

আর কয়টি উদাহরণ :

Something is round =
There is at least one thing x such that x is round = $\exists xRx$
Something is spiritual = $\exists xSx$
There are things that are non-spiritual =
Something is not spiritual = $\exists x \sim Sx$
Not everything is material = $\exists x \sim Mx$
There are ghosts = $\exists xGx$
Ghosts exist = $\exists xGx$

সংক্ষেপে বলতে গেলে

Everything is F = $UxFx$ Nothing is F = $Ux \sim Fx$
Something is F = $\exists xFx$ Something is not F = $\exists x \sim Fx$
F exists = $\exists xFx$
F does not exist = $Ux \sim Fx$

৮. মানকের পরিধি (Scope) ঃ বন্ধনীর প্রয়োজন

লক্ষ করে থাকবে, দ্বিবিধেয়ক বাক্যকে (A, E, I, O-কে) মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে গিয়ে ঃ আমরা Ux ও ∃x-এর পরবর্তী অংশ সব সময় বন্ধনীর মধ্যে রেখেছি, কিন্তু একবিধেয়ক বাক্যের বেলায় মানকের পরবর্তী অংশ বন্ধনীভুক্ত করা হয় নি। যেমন, আমাদের সংকেতলিপিতে

All S are P = Ux $(Sx \supset Px)$
Some S are P = $\exists x\ (Sx \cdot Px)$

কিন্তু

Everything is F = UxFx
Something is $F = \exists xFx$

কেন প্রথম ক্ষেত্রে বন্ধনীর প্রয়োজন, আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বন্ধনী দরকার হয় না ? প্রথম ক্ষেত্রে বন্ধনী ব্যবহার না করলে কী ক্ষতি হত ? যথা, যদি লিখতাম

All S are P = U$xSx \supset Px$

তাহলে কী ক্ষতি হত ? আর দ্বিতীয় ক্ষেত্রে বন্ধনী ব্যবহার না করে কী লাভ হল ? যথা, যদি লিখতাম

Everything is F = U$x(Fx)$

তাহলে কী ক্ষতি হত ? এসব প্রশ্নের উত্তর দিতে হলে মানকের পরিধির কথা বলা দরকার।

যোজকের পরিধির সঙ্গে আমাদের পরিচয় আছে। এ পরিচিত বিষয়টি থেকে সুরু করা ভাল। একটা উদাহরণ। আমরা জানি

$\sim p \vee q$ $\qquad\qquad$ $\sim(p \vee q)$

এ বাক্য দুটির মধ্যে আকাশ-পাতাল পার্থক্য ঃ প্রথমটিতে "$\sim$"-এর পরিধি বা প্রভাবক্ষেত্রের মধ্যে আছে কেবল 'p', দ্বিতীয়টিতে '$p \vee q$' ; প্রথম বাক্যটিতে "$\sim$" দিয়ে নিষেধ করা হয়েছে 'p'কে, দ্বিতীয় বাক্যে '$p \vee q$'-কে। অনুরূপভাবে বলতে পারি

Ux $(Mx \supset \sim Px)$ [No men are perfect]
$\sim$Ux $(Mx \supset Px)$ [$\sim$All men are perfect]

—এখানে প্রথম বাক্যের '$\sim$' প্রভাবিত করছে কেবল Px-কে, আর দ্বিতীয় বাক্যের '$\sim$' সমগ্র 'Ux $(Mx \supset Px)$'-কে। এ বাক্য দুটির পার্থক্য লক্ষ কর। প্রথম বাক্যের বক্তব্য হল ঃ কোনো মানুষ নিখুঁত নয় (E)। আর দ্বিতীয় বাক্যটির বক্তব্য ঃ 'সব মানুষ নিখুঁত'—এ বাক্য মিথ্যা, মানে—কোনো কোনো মানুষ নিখুঁত নয় (O)।

এবার মানকের পরিধির কথা। কোনো মানকের পরিধি বলতে বোঝায় ঃ মানকটি যে মুক্ত বাক্যকে মানকিত করে সে বাক্যের আদিতে মানকটি বসিয়ে যে বাক্য পাওয়া যায় সে বাক্য। যথা,

$\exists x\ (Fx \cdot Gx)$

-এ বাক্যের '∃x'-এর পরিধি হল সমগ্র বাক্যটি।

$Ms \supset$ Ux $(Hx \supset Mx)$ $\qquad$ Ux $(Hx \supset Mx) \supset Ms$

এ বাক্য দুটিতে Ux-এর পরিধি হল : Ux $(Hx \supset Mx)$। লক্ষণীয়, কোনো মানক যে বাক্যকে মানকিত করে তা যেমন মানকটির পরিধির অন্তর্ভুক্ত, মানকটি নিজেও স্বপরিধির অন্তর্ভুক্ত। যথা

$$\text{U}x\ (Fx \supset Gx)$$

-এর '$Fx \supset Gx$' Ux-এর পরিধির অন্তর্ভুক্ত, আবার 'Ux'ও এ পরিধির অন্তর্ভুক্ত।

যোজকের পরিধির মত মানকের পরিধিও স্পষ্টভাবে দেখানো দরকার। আমরা জানি, যোজকের পরিধি দেখানো হয় বন্ধনী দিয়ে। ঠিক সেরকম

মানকের পরিধিও দেখানো হয় বন্ধনী দিয়ে।

আবার, আমরা জানি, যোজক '$\sim$'-এর পরিধি দেখাতে গিয়ে যে রীতি অনুসরণ করা হয় সে রীতি অনুসারে

'$\sim$' প্রভাবিত করে এর অব্যবহিত পরবর্তী অংশকে,
'$\sim$' যে বাক্যকে প্রভাবিত করে, নিষেধ করে, তা বন্ধনীভুক্ত করা হয়,
তবে '$\sim$'-এর পরবর্তী অংশ যদি অযৌগিক বাক্য হয়
তাহলে অংশটিকে বন্ধনীর মধ্যে রাখার প্রয়োজন নেই।

ঠিক সেরকম, মানকের পরিধি দেখাতে গিয়ে যে রীতি অনুসরণ করা হয় সে রীতিতে

মানক প্রভাবিত করে এর অব্যবহিত পরবর্তী অংশকে
যে মুক্ত বাক্য কোনো মানকের প্রভাবক্ষেত্রের অন্তর্ভুক্ত সে বাক্যকে বন্ধনীভুক্ত করা হয়
তবে মানকের অব্যবহিত পরবর্তী অংশ যদি $\cdot$, v, $\supset$, $\equiv$ মুক্ত থাকে তাহলে ঐ অংশটিকে বন্ধনীর মধ্যে রাখার প্রয়োজন নেই।

এজন্য

UxFx $\quad$ $\exists xGx$ [লক্ষণীয় Fx, Gx বন্ধনীবিহীন]

লেখা চলে, কিন্তু মুক্ত বাক্য

$$Fx \supset Gx \qquad Fx \cdot Gx$$

যদি যথাক্রমে Ux ও $\exists x$ দিয়ে মানকিত করতে হয়, তাহলে বন্ধনী ব্যবহার করে লিখতে হবে :

(1) Ux $(Fx \supset Gx)$ $\qquad$ (2) $\exists x\ (Fx \cdot Gx)$

এদের বদলে

(1′) U$xFx \supset Gx$ $\qquad$ (2′) $\exists xFx \cdot Gx$

লেখা চলবে না।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে—

কোনো মানকের অব্যবহিত পরে যদি কোনো বন্ধনীবিহীন বাক্য থাকে তাহলে বুঝতে হবে, মানকটির পরিধি কেবল এ বন্ধনীবিহীন বাক্যের শেষান্ত পর্যন্ত বিস্তৃত ;

যথা

$$UxFx \supset (Fa \cdot Fb)$$

এ বাক্যে Ux-এর পরিধি বিস্তৃত কেবল দ্বিতীয় x পর্যন্ত।

আর

> কোনো মানকের অব্যবহি [illegible] প হাতের) বন্ধনী থাকে তাহলে বুঝতে হবে, মানকটির প [illegible] ডানের) সাথী-বন্ধনী পর্যন্ত বিস্তৃত।

যথা

$$Ux[(Fx \cdot Gx) \supset (Fx \vee Gx)]$$

এ বাক্যে Ux-এর পরিধি বিস্তৃত ("Ux" থেকে) "]" পর্যন্ত।

এখন নিচের (1) আর (1′)-এর দিকে নজর দাও। এ দুটো বাক্যে একই মানক আছে ঠিক; কিন্তু মানকটির পরিধি ভিন্ন ভিন্ন। কোন্ বাক্যে Ux-এর পরিধি কী তা দাগিয়ে দেখানো হল (দাগ পরিধির বিস্তৃতি বোঝাচ্ছে)।

$$(1) \quad \underline{Ux(Fx \supset Gx)}$$
$$(1') \quad \underline{UxFx} \supset Gx$$

(2) আর (2′)-এর মধ্যেও অনুরূপ পার্থক্য

$$(2) \quad \underline{\exists x(Fx \cdot Gx)}$$
$$(2') \quad \underline{\exists xFx} \cdot Gx$$

পরিধির, সুতরাং বন্ধনীর, পার্থক্য খুব গুরুত্বপূর্ণ। পরিধির পার্থক্যের ফলে বাক্যে আর কী পার্থক্য দেখা দেয়, লক্ষ কর। দেখ, (1) বচন, (1′) মুক্ত বাক্য; (1) সার্বিক মানকিত বাক্য, (1′) কিন্তু প্রাকল্পিক বাক্য—যার অনুগ মুক্ত বাক্য। এবার (2) ও (2′)। দেখ, (2) বচন, (2′) মুক্ত বাক্য। (2) সাত্তিক মানকিত বাক্য, (2′) কিন্তু সংযৌগিক বাক্য—যার দ্বিতীয় সংযোগী মুক্ত বাক্য।

এ কথাও বলতে পারি, মানকের পরিধির পার্থক্য মানকের পার্থক্যের চেয়ে কম গুরুত্বপূর্ণ নয়। নিচে দুটি বাক্য নিয়ে এদের "অনুবাদ" দেওয়া হল।

(১) $Ux(Fx \supset Ga)$ = Everything x is such that if Fx then Ga
= For all x, if x is F then a is G
= If anything is F then a is G (১′)

(২) $\exists xFx \supset Ga$ = If there is something x such that Fx then Ga
= If at least one x is F then a is G
= If anything is F then a is G (২′)

(১) আর (২)-এর মানক ভিন্ন ভিন্ন, অথচ এদের বক্তব্য অভিন্ন [(১′) আর (২′) দেখ]। কাজেই বলতে পারি (১) আর (২) সমার্থক। মানক ভিন্ন হওয়া সত্ত্বেও এ বাক্য দুটি যে সমার্থক তার হেতু—এদের মানকপরিধির পার্থক্য। দেখা গেল, (১)-ও-(২)-এর

-মত-বাক্যের মানকবিনিময় করতে পারি, যদি মানকপরিধিরও সংকোচন প্রসারণ করি। অনুরূপ আর একটি বাক্য জোড় নাও :

$$\frac{\exists x\,(Fx \supset Ga)}{\mathrm{U}xFx \supset Ga}$$

এ বাক্য দুটিও সমার্থক।

৯. বদ্ধ বাক্য : মুক্ত ও বদ্ধ গ্রাহক

$$Sx \supset Px, \quad Sx \cdot Px, \qquad (1)$$

Sx, Px ইত্যাদি বচন নয়, মুক্ত বাক্য। সুতরাং এরকম বাক্য সম্পর্কে সত্য মিথ্যার কথা ওঠে না। কিন্তু দেখা গেল, এরকম কোনো মুক্ত বাক্য নিয়ে বাক্যটিকে মানকিত করলে, মানে—(বাক্যটিকে বন্ধনীভুক্ত করে) এর বামে $\mathrm{U}x$ বা $\exists x$ যোগ করলে, মুক্ত বাক্যটি বচনে বা বদ্ধ বাক্যে পরিণত হয়। যথা (1)-এর অন্তর্গত মুক্ত বাক্যগুলি থেকে পাই এসব বদ্ধ বাক্য বা বচন

$$\mathrm{U}x\,(Sx \supset Px), \quad \exists x\,(Sx \cdot Px)^*$$

এভাবে কোনো মুক্ত বাক্যকে বদ্ধ বাক্যে পরিণত করাকে বলে generalization করা।

মুক্ত বাক্য থেকে বদ্ধ বাক্য পেতে হলে প্রত্যেকটি গ্রাহককে মানকবদ্ধ করতে হবে, মানকের পরিধির মধ্যে রাখতে হবে। যে গ্রাহক মানক-পরিধির অন্তর্ভুক্ত তাকে বলে বদ্ধ গ্রাহক (bound variable)। আর যে গ্রাহক মানক-পরিধির বহির্ভুক্ত তাকে বলে মুক্ত গ্রাহক (free variable)। এখন বলতে পারি

যে বাক্যের কোনো গ্রাহকই মুক্ত নয় সে বাক্য হল বদ্ধ বাক্য বা বচন,

যে বাক্যের একটি গ্রাহকও মুক্ত সে বাক্য মুক্ত বাক্য, অ-বচন।

কোনো গ্রাহক x, মুক্ত নাকি বদ্ধ—সুতরাং x-যুক্ত কোনো বাক্য মুক্ত বাক্য না বচন—তা বোঝা যায়, মানক ও বন্ধনীর ব্যবহার দেখে। নিচের বাক্যগুলি লক্ষ কর। এদের প্রত্যেকটি মুক্ত বাক্য :

$$Sx,\ Px,\ Sx \cdot Px,\ Sx \supset Px$$

$$\mathrm{U}xSx \supset Px,\ \exists xSx \cdot Px,\quad \mathrm{U}x\,(Ax \vee Bx) \supset Cx$$

$$\mathrm{U}x\,(Hx \supset Mx) \supset Mx$$

$$Mx \supset \exists x\,(Hx \cdot Mx)$$

প্রথম সারির বাক্যে : প্রত্যেকটি x মুক্ত

দ্বিতীয় তৃতীয় সারির বাক্যে : সর্বশেষ xটি মুক্ত, আর

চতুর্থ সারির বাক্যে : প্রথম xটি মুক্ত।

---

* বা $\exists x\,(Sx \supset Px) \quad \mathrm{U}x\,(Sx \cdot Px)$

† আমরা আগেই বলেছি (অধ্যায় ২, বিভাগ ৪) মুক্ত বাক্যে গ্রাহকের জায়গায় নাম বসিয়ে মুক্ত বাক্য থেকে বচন পাওয়া যায়।

এবার নাও এ বাক্যটি

$$Ux\,(Fy \supset Gx)$$

এখানে y মানক Ux-এর পরিধির অন্তর্ভুক্ত, কিন্তু y বদ্ধ গ্রাহক নয়, মুক্ত গ্রাহক। দেখা গেল, কোনো গ্রাহক প্রতীক যদি কোনো মানকের পরিধির অন্তর্ভুক্ত হয় কেবল তাহলেই বলা যায় না যে, গ্রাহকটি বদ্ধ। x-কে বদ্ধ গ্রাহক হতে হলে x-যুক্ত মানকের পরিধির অন্তর্ভুক্ত হতে হবে, y-কে বদ্ধ গ্রাহক হতে হলে y-যুক্ত মানকের পরিধির অন্তর্ভুক্ত হতে হবে, ইত্যাদি ইত্যাদি।

অর্থাৎ

> যে গ্রাহক যে মানকের অঙ্গীভূত সে গ্রাহক যদি সে মানকের পরিধির অন্তর্ভুক্ত হয়, তাহলে গ্রাহকটি বদ্ধ গ্রাহক বলে গণ্য, নতুবা নয়।

দেখ, আলোচ্য বাক্যে y গ্রাহকটি Ux-এর পরিধির অন্তর্ভুক্ত ঠিক, কিন্তু y-যুক্ত কোনো মানকের, Uy বা $\exists y$-এর, পরিধির অন্তর্ভুক্ত নয় ; সুতরাং এ বাক্যে y বদ্ধগ্রাহক নয়।

মুক্ত ও বদ্ধ গ্রাহক সম্পর্কে আর একটা কথা। গ্রাহককে আমরা মুক্ত বদ্ধ—এ দু শ্রেণীতে ভাগ করেছি। এ শ্রেণী দুটি কিন্তু বিসংবাদী নয় : কেননা কোনো বাক্যে একই গ্রাহক মুক্তও হতে পারে, বদ্ধও হতে পারে।

যথা

$$UxFx \supset Gx$$

এ বাক্যে প্রথম ও দ্বিতীয় x বদ্ধ গ্রাহক, কিন্তু তৃতীয় x মুক্ত। এজন্য মুক্ত ও বদ্ধ গ্রাহকের কথা না বলে, গ্রাহকের মুক্ত অবস্থান (free occurrence) ও বদ্ধ অবস্থান (bound occurrence)-এর কথা বলা ভাল। কোনো গ্রাহকের যে অবস্থান প্রাসঙ্গিক-মানকটির পরিধির অন্তর্ভুক্ত তা এর বদ্ধ অবস্থান ; আর যে অবস্থান বদ্ধ নয় তা মুক্ত অবস্থান। আবার উপরোক্ত বাক্যটি নাও। দেখ, এতে x-এর প্রথম ও দ্বিতীয় অবস্থান বদ্ধ আর তৃতীয় অবস্থান মুক্ত। একই বাক্যে কোনো গ্রাহক মুক্তও হতে পারে, বদ্ধও হতে পারে, ঠিক। কিন্তু একই অবস্থান হয় মুক্ত নয়ত বদ্ধ, মুক্ত বদ্ধ দুই-ই হতে পারে না।

আমরা দেখেছি, মুক্ত বাক্য থেকে দুভাবে বচন পাওয়া যায় :

(১) দৃষ্টান্তীকরণ করে (instantiation করে)

(২) Generalization করে, মানে মুক্ত বাক্যকে নির্ভুলভাবে মানকিত করে।

উদাহরণ হিসাবে নেওয়া যাক এ মুক্ত বাক্যটি

$$Hx \supset Mx \qquad [H = \text{is human},\ M = \text{is mortal}]$$

এ বাক্যের দৃষ্টান্ত হিসাবে পেতে পারি

$$Ha \supset Ma$$
$$Hb \supset Mb$$
$$Hc \supset Mc$$

প্রসঙ্গত, এগুলি প্রাকল্পিক (conditional) বচন।

আর উপরোক্ত মুক্ত বাক্যটিকে সার্বিক মানকিত করে পাই

$$Ux\ (Hx \supset Mx)$$

এ বাক্যটি কিন্তু প্রাকল্পিক বচন নয়। এ জাতীয় বচনকে বলে generalized conditional।

১০. মানকের প্রতীকী রূপ

আমাদের গৃহীত সংকেতলিপিতে

সার্বিক মানকের প্রতীকী রূপ : Ux

সাত্তিক মানকের প্রতীকী রূপ : $\exists x$

কিন্তু

সার্বিক মানক হিসাবে কেউ কেউ লেখেন : (x)

কেউ কেউ লেখেন : $(\forall x)$

কেউ কেউ লেখেন : Λx

তারপর

সাত্তিক মানক হিসাবে কেউ কেউ লেখেন : $(\exists x)$

কেউ কেউ লেখেন : Vx

কেউ কেউ লেখেন : (Ex)

বিভিন্ন গ্রন্থকার বিভিন্ন সংকেতলিপি পছন্দ করেন। এ বিভিন্ন লিপিগুলির সঙ্গে পরিচয় থাকা ভাল। উক্ত মানক-প্রতীকগুলি ব্যবহার করে

Some S are P, All S are P

-এর সাংকেতিক রূপ দেওয়া হল, মানক-প্রতীকের বিভিন্নতা দেখানো হল।

Some S are P	All S are P
$\exists x\ (Sx \cdot Px)$	$Ux\ (Sx \supset Px)$
$(\exists x)\ (Sx \cdot Px)$	$(x)\ (Sx \supset Px)$
$Vx\ (Sx \cdot Px)$	$(\forall x)\ (Sx \supset Px)$
	$\Lambda x\ (Sx \supset Px)$

অনুশীলনী

১ নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে মানকলিপিতে ব্যক্ত কর :

1. Every (thing) is blue
2. There is a blue (thing)
3. Every (number) is either even or odd

4. There is a blue book
5. Every book is blue

1—5 : Carnap

6. There are black swans
7. All is well that ends well
8. No planets are self-luminous
9. Barking dogs do not bite
10. There is a tower which is not vertical

6—10 : Reichenbach

11. Everything is an apple
12. Nothing is both an apple and a pear
13. Every living thing breathes
14. Everything runs
15. Some people live in cities
16. There are cats

11—16 : Resnik

২. নিচে কয়েকটি বাক্যের সাংকেতিক রূপ দেওয়া হল। কোন্ (বা কোন্ কোন্) রূপ নির্ভুল, বল।

(১) No sentences are propositions

$$\sim \exists x\,(Sx \cdot Px)$$
$$Ux\,(Sx \cdot Px)$$
$$Ux\,(Sx \supset \sim Px)$$

(২) Not all sentences are propositions

$$Ux\,(Sx \supset \sim Px)$$
$$\sim Ux\,(Sx \supset Px)$$
$$\exists x\,(Sx \cdot \sim Px)$$

(৩) Some non-sentences are propositions

$$\exists y\,(\sim Sy \cdot Py)$$
$$\exists y\,(\sim Sy \supset Py)$$
$$\exists y \sim Sy \cdot \exists y Py$$

(৪) Some sentences are non-propositions

$$\exists x\, Sx \cdot \sim Px$$
$$\exists y\,(Sy \cdot \sim Py)$$
$$\exists z Sz \cdot \exists z\, Pz$$

৩. নিচে কয়টি বাক্য সংকেতায়িত করা হল। সংকেতকরণ নির্ভুল কিনা বল। যদি সংকেতকরণে কোনো ভুল দেখ, সংশোধন করে দাও।

(1) Sadie stole something at the Emporium and exchanged it for a blouse

= ∃x (Sadie stole x at the Emporium) . Sadie exchanged it for a blouse

(2) If Sadie wants anything she manages to get it
= ∃x (Sadie wants x ⊃ Sadie manages to get x)

—Quine

(3) If something is lying on the table, it belongs to Charles
= ∃x (x is lying on the table) ⊃ x belongs to Charles

(4) If something is lying on the table, Charles is at home
= ∃x (x is lying on the table) ⊃ Charles is at home

—Carnap

৪. নিম্নোক্ত বাক্যগুলি লক্ষ কর। এদের কোনগুলি বচন, কোনগুলি মুক্ত বাক্য? গ্রাহকগুলির মধ্যে কোনগুলি মুক্ত, কোনগুলি বদ্ধ? মুক্ত গ্রাহকগুলি দাগিয়ে দাও।

1. Ux (x is solid v x is liquid)
2. Ux (x is solid) v x is liquid
3. x is solid v x is liquid
4. ∃y (y is a proposition) · y is true
5. ∃y (y is a proposition) · ∃y (y is true)
6. ∃y (y is a proposition · y is true)

৫. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিতে মানকের পরিধি দেখাও। দেখাও, পরিধি দাগিয়ে দিয়ে।

(a) UxFx v Gx
(b) ∃x (Fx · Gx)
(c) Ux (Fx ⊃ Gx)
(d) Ux (Fx v Gx) · Hx
(e) Ux (Fx v Ga) · Ha
(f) (Fx · Gy) ⊃ Ux (Fx · Gy)
(g) ∃xFx · Ux (Fx v Gx)
(h) Ux [(Fx · Gx) ⊃ (Fx v Gx)]
(i) Ux (Pa · ~Sx)
(j) (∃y) Sy · ~Ry
(k) Ux (~Px v ~Sx) ⊃ Pb
(l) Ux [(Px · ~Sx) ⊃ (Rx v ~Rx)]
(m) (Py · Ry) ⊃ [Ux Su ⊃ Px]

(i)—(m) : Guttenplan and Tamny

৬. ৫-এর অন্তর্ভুক্ত বাক্যগুলির মধ্যে কোনগুলি মুক্ত বাক্য? মুক্ত গ্রাহকগুলি দাগিয়ে দাও।

৭. ধর, বিশ্বে আছে কেবল তিনটি ব্যক্তি : a, b, c। এ কল্পনা অনুসারে নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে সত্যাপেক্ষ বাক্যের রূপ দাও।

∃xFx UxFx

∃x (Fx · Gx) Ux (Fx ⊃ Gx)

৮. Supposing the universe to comprise just *a*, *b*, *c*, express these truth functionally :

$\exists x\,(Fx \vee Gx)$ $\quad$ $Ux\,(Fx \vee Gx)$ $\quad$ $Ux\,(Fx \cdot Gx)$

$\exists xFx \vee \exists xGx$ $\quad$ $UxFx \vee UxGx$ $\quad$ $UxFx \cdot UxGx$

Which come out equivalent to one another ?

—Quine

৯. The following table describes a small and artificial universe of discourse.

	F	*G*	*H*	*J*	*K*
a	+	−	+	−	−
b	−	+	+	−	+
c	+	+	+	−	−

Which of the following are true and which false in the universe described above ?

1. $\exists x\,(Jx \cdot Kx)$
2. $Ux\,(Jx \supset Kx)$
3. $Ux\,[(Gx \cdot \sim Fx) \supset Kx]$
4. $\exists x\,[Fx \cdot (Gx \equiv Hx)]$
5. $(Fb \vee Gc) \supset \exists x \sim Hx$
6. $Ux\,[(Fx \vee Kx) \supset (Hx \cdot Gx)]$

—Gustason & Ulrich

১০. Given that the universe of discourse consists of some (wooden) blocks, symbolise the following, using

"*Bx*" for "*x* is blue"
"*Cx*" for "*x* is cubical"
"*Rx*" for "*x* is red"
"*Yx*" for "*x* is yellow".

a. All of the blocks are yellow.
b. Some of the blocks are yellow and some are red.
c. Every yellow block is cubical.
d. Some red blocks are not cubical.
e. At least one of the blocks is either red or cubical.
f. Some block is red or some block is cubical.
g. All of the blocks are red and all are cubical.
h. All of the blocks are red and cubical.
i. A block is either cubical and blue or neither.

j. All of the blocks are blue or all are cubical.
k. All of the blocks are blue or cubical.
l. All of the blue blocks are cubical.
m. All of the blue and all of the red blocks are cubical.
n. There is a block which is cubical and blue.
o. All of the non-cubical blocks are yellow or red.

১১. নিচে একটা প্রসঙ্গ বিশ্বের বর্ণনা দেওয়া হল :

a = < blue, cubical >
b = < blue, not cubical >
c = < blue, not cubical >
d = < blue, not cubical >

অনুশীলনী ১০-এর অন্তর্ভুক্ত বাক্যগুলির মধ্যে কোনগুলি এ বিশ্বে সত্য ?

১২. Here is a universe of discourse :

a = < blue, not cubical >
b = < red, cubical >
c = < blue, not cubical >
d = < yellow, cubical >
e = < yellow, cubical >

Which of the statements symbolized in Exercise 10 are true if this set of blocks is the universe of discourse ?

১৩. Can you describe a set of blocks such that statements *e*. and *f*. would differ in truth-value ?

১৪. Can you describe a set of blocks such that statements *g*. and *h*. would differ in truth-value ?

১৫. Can you describe a set of blocks such that statements *j*. and *k*. would differ in truth-value ?

১৬. Can you describe a set of blocks such that statements
a., *c*., *f*., *j*., *k*., *l*., *m*., *o*.,
would make jointly true statements about them ?

১০—১৬ : Ackermann

১৭. Which of the following are true ?

(ক) $Ux\ [x = x \vee \sim(x = x)]$
(খ) $Ux\ (x = x) \vee \sim Ux\ (x = x)$
(গ) $Ux\ (x = x) \vee Ux \sim(x = x)$
(ঘ) $Ux\ (x = x) \cdot Ux \sim(x = x)$

১৮. Which of the following are true in the universe of humans ? of positive whole numbers ?

1. $(\exists x)$ (x has arms)
2. $Ux\ (x > 0)$
3. Ux (x eats $\supset$ x has a digestive system)
4. $(\exists x)$ (x is a man) $\cdot$ [Ux (x is a number) $\supset$ $(\exists x)$ (x is a number)]

(১৭)—(১৮) : Resnik

৪

জাতিবিষয়ক বাক্য ঃ মানকলিপিতে অনুবাদ

১. ভূমিকা

সাধারণ ভাষার কোনো জাতিবিষয়ক বাক্যকে মানকলিপিতে অনুবাদ করতে হলে
প্রথমে বাক্যটিকে গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানসম্মত A, E, I, O আকারে, মানে মানক-উদ্দেশ্য-সংযোজক-বিধেয় আকারে, ব্যক্ত করবে, এবং তারপর উদ্দেশ্য বিধেয়ের জায়গায় সংক্ষেপক প্রতীক বসাবে।

তা যদি পার তাহলে দেখবে বাক্যটিকে মানকলিপিতে রূপান্তর করা অতি সহজ কাজ।

উদাহরণ

All teachers are not modest
= Some teachers are not modest
= Some T are not M
= $\exists x\ (Tx \cdot \sim Mx)$
Only first class graduates are awarded scholarship
= All who are awarded scholarship are first class graduates
= All A are F
= $\text{U}x\ (Ax \supset Fx)$

সাধারণ ভাষার অনপেক্ষ বাক্য কত বিচিত্র রূপ ধারণ করতে পারে তা নিচে দেখানো হল। প্রথমে দেখ A বাক্য কত বিভিন্নরূপে ব্যক্ত হতে পারে।

২. A বাক্যের বিভিন্ন রূপ

উদাহরণ

Crows are black
All crows are black
Any (*every*, *each*) crow is black
Crows are *always* (*universally*) black
A crow is a black thing
Black things *alone* are crows
Only black things are crows
None but black things are crows
If anything is a crow then it is black
Birds build nests
What is extended is coloured

Where there is smoke there is fire
To try *is to* succeed
He who tries, succeeds
Blessed are *the* poor
All who were present, voted
Each one (*every one*) who was present, voted

এ বাক্যগুলির প্রত্যেকটি A বাক্য। সুতরাং এদের ব্যক্ত করতে হবে

$$\text{U}x\ (-x \supset -x)$$

আকারে। যথা

To try is to succeed $=\text{U}x\ (Tx \supset Sx)$
$[Tx = x$ tries, $Sx = x$ succeeds$]$

A বাক্যের আরও কয়টি রূপ। দেখতে পাবে

No matter who—, No matter how—, Even the—

আকারেও A বাক্য ব্যক্ত হয়। উদাহরণ

(1) No matter how you sing it, a Tagore song is entertaining
(2) No matter who applies, he is admitted to the Congress Party
(3) Even the worst student can solve the problem

এ বাক্যগুলিকে এভাবে ব্যক্ত করতে হবে।

(1) $=\text{U}x$ (x is a Tagore song $\supset x$ is entertaining) $=\text{U}x\ (Tx \supset Ex)$
(2) $=\text{U}x$ (x applies··· $\supset x$ is admitted···) $=\text{U}x\ (Ax \supset Cx)$
$[Cx = x$ is admitted to Congress Party$]$
(3) $=$ Every student can solve this problem $=\text{U}x\ (Sx \supset Px)$

সব সময় কেবল চেহারা দেখেই সাধারণ ভাষার বাক্যের জাত নির্ণয় করা যায় না। নিচে তিন জোড়া বাক্য উল্লেখ করা হল। দেখবে, প্রত্যেক জোড়ের বাক্য দুটি ভিন্ন জাতের।

A logic-book is a valuable thing
$\text{U}x\ (Lx \supset Vx)$
A logic-book was in the exhibition
$\exists x\ (Lx \cdot Ex)$

লক্ষণীয়, এখানে প্রথম বাক্যটি A, দ্বিতীয়টি I।

The tiger *is* carnivorus
The tiger *was* killed

এখানে প্রথম বাক্যটি জাতিবিষয়ক A, দ্বিতীয়টি ব্যক্তিবিষয়ক। এদের সাংকেতিক রূপ হবে যথাক্রমে এমন :

$$Ux\ (Tx \supset Cx)$$
$$Ta \cdot Ka \qquad [a = \text{the/this (tiger)}]$$

আর এক জোড়া বাক্য :

CPIM supporters profess to be marxists
CPIM supporters were present in the meeting

এখানে প্রথম বাক্যটি A, দ্বিতীয়টি I।

He who is found copying *is* expelled
He who was found copying *was* expelled

এ জোড়ের প্রথম বাক্যটি A ; দ্বিতীয়টি কিন্তু ব্যক্তিবিষয়ক, এর বক্তব্য : He was found copying and was expelled। এদের সাংকেতিক রূপ হবে যথাক্রমে এরকম :

$$Ux\ (Fx \supset Ex)$$
$$Fa \cdot Ea$$

উদাহরণ হিসাবে ওপরে যেসব A বাক্য উল্লেখ করা হয়েছে মানকলিপিতে সেগুলির প্রধান যোজক '⊃'।

কিন্তু এমন A বাক্যের সাক্ষাৎ পাবে যেগুলি '≡' দিয়ে ব্যক্ত করতে হয়। উদাহরণ

All and only men are rational = $Ux(Mx \equiv Rx)$
All and only my friends have been invited
= $Ux(Fx \equiv Ix)$
One in admitted to the Ph.D if and only if one fares well in the viva
= $Ux(Ax \equiv Fx)$
Something is feared if and only if it is unknown
= $Ux(Fx \equiv Ux)$

লক্ষণীয়, "Something" দিয়ে সুরু হলেও বাক্যটি সার্বিক বাক্য : এ বাক্যের বক্তব্য— যেকোনো জিনিষ সম্পর্কে ভয় হয় যদি এবং কেবল যদি……

তুলনীয়

If something is wrong it should be rectified = $Ux(Wx \supset Rx)$

৩. E বাক্যের বিভিন্ন রূপ

A বাক্যকে মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে পারলে E বাক্যকেও মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে পারার কথা। কেননা E বাক্যকে সমার্থক A-তে রূপান্তরিত করা যায়।

No one, None, Nobody, Nothing, never, by no means, in no wise, not in the least

এসব E-এর চিহ্ন। E বাক্যের অন্যান্য রূপের আর কয়টি উদাহরণ দেওয়া হল।

A bird is not a mammal
Birds are not mammals
If it is a bird then it is not a mammal
The whale is not a fish
To be apriori is not to be synthetic
Only *non*-conformists wear beards

এ বাক্যগুলির প্রত্যেকটিকে E-এর আকারে ব্যক্ত করতে হবে। যথা, সর্বশেষ ব্যক্যটি ব্যক্ত করতে হবে এভাবে ঃ

$$\mathrm{U}x\,(x \text{ wears beards} \supset \sim x \text{ is a non-conformist})$$
$$= \mathrm{U}x(Wx \supset \sim Cx)$$

আরও দুটি বাক্যাকার :

Only S are not P
None but S are not P

মানকলিপিতে এদের ব্যক্ত করতে হবে এভাবে

$$\mathrm{U}x(\sim Px \supset Sx)$$

যথা

Only the inattentive do not pass $= \mathrm{U}x(\sim Px \supset Ix)$

None but the lazy do not succeed $= \mathrm{U}x(\sim Sx \supset Lx)$

এরকম আর একটি উক্তি ঃ

One is wise who does not criticise the ruling party
$= \mathrm{U}x(\sim x \text{ does not criticise} \cdots \supset x \text{ is wise})$
$= \mathrm{U}x(\sim Cx \supset Wx)$

৪. I আর O বাক্যের বিভিন্ন রূপ

Many, several, a few, sometimes, often, generally, usually

এসব আংশিক বাক্যের চিহ্ন। এসব যদি কোনো ভাববাচক বাক্যে থাকে তাহলে সে বাক্য I বলে গণ্য। I বাক্য আর যেসব রূপ ধারণ করতে পারে উদাহরণ দিয়ে নিচে তার কয়টি দেখানো হল।

White swans exist
There are white swans
Something is a swan and is white
There is a swan which is white
There is a thing which is a swan and which is white
There is an individual which is both a swan and white

"There is"-এর জায়গায় "There exists", "thing"-এর জায়গায় "object", "individual" লিখলে এ তালিকা আরও বড় হত। আর কয়টি উদাহরণ।

Oxford professors visited our university
A student presided over the meeting
Congressmen were present in the meeting

এ বাক্যগুলির প্রত্যেকটিকে

$$\exists x\,(-x \cdot -x)$$

আকারে ব্যক্ত করতে হবে। এবার নিম্নোক্ত বাক্য দুটির পার্থক্য লক্ষ কর।

Congressmen were present ···* $= \exists x\,(Cx \cdot Px)$
Congressmen were not present ··· $= Ux(Cx \supset \sim Px)$

সেরকম

Oxford professors visited our university**
$= \exists x(Ox \cdot Vx)$
Oxford professors did not visit ···
$= Ux(Ox \supset \sim Vx)$

আমরা জানি

All, Every, Each, Everybody, Everything

প্রভৃতি যদি কোনো অভাববাচক বাক্যে থাকে তাহলে বাক্যটি O বলে গণ্য। যথা

All philosophers are not sceptics $= \exists x(Px \cdot \sim Sx)$
All are not saints that go to church =
All that go to church are not saints $= \exists x(Cx \cdot \sim Sx)$

A, E, I, O বাক্যের উদাহরণ হিসাবে এতক্ষণ নিয়েছি দ্বিবিধেয়ক বাক্য। কিন্তু দ্বিবিধেয়ক বাক্য মাত্রই A, E, I, O নয়। নিচে এমন কয়টি দ্বিবিধেয়ক বাক্যের অনুবাদ দেওয়া হল যেগুলি A, E, I, O নয়।

Everything is material and extended $= Ux(Mx \cdot Ex)$
Nothing is square and round $= Ux \sim (Sx \cdot Rx)$
Something is pleasant and harmful $= \exists x(Px \cdot Hx)$
Something is material only if extended $= Ux(Mx \supset Ex)$

ওপরের ও পৃঃ ২৯-এর উদাহরণগুলি দেখলেই বোঝা যাবে

সার্বিকমানকিত বাক্য মাত্রই $Ux(-x \supset -x)$ আকারের হবে, আর
সাত্তিকমানকিত বাক্য মাত্রই $\exists x(-x \cdot -x)$ আকারের হবে

এমন কথা নেই।

---

* বলা বাহুল্য, এ বাক্যের বক্তব্য এই নয় যে : সব কংগ্রেসীরা এ সভায় উপস্থিত ছিল।

** এ বাক্যের বক্তব্য এই নয় যে : অক্সফোর্ডের সব অধ্যাপক আমাদের বিশ্ববিদ্যালয়ে এসেছিল।

এখন নিম্নোক্ত জোড়ের বাক্য দুটির পার্থক্য লক্ষ কর।

(1) Something is solid and is liquid
(2) Something is solid and something is liquid

এদের সাংকেতিক রূপ হবে এমন :

(1′) $\exists x(Sx \cdot Lx)$
(2′) $\exists xSx \cdot \exists xLx$

লক্ষণীয় বাক্য দুটি অসমার্থক ; এদের প্রথমটি মিথ্যা, দ্বিতীয়টি সত্য। আর একটি বাক্য জোড় :

Everything is solid or not solid = $Ux(Sx \vee \sim Sx)$
Everything is solid or everything is non-solid = $UxSx \vee Ux \sim Sx$

এ বাক্য দুটিও অসমার্থক। দেখ, প্রথমটি সত্য, দ্বিতীয়টি মিথ্যা।

৫. বহুবিধেয়ক বাক্য

আমরা একবিধেয়ক ও দ্বিবিধেয়ক বাক্যকে মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে শিখেছি। এখন বলব বহুবিধেয়ক বাক্যের কথা। একটা উদাহরণ।

a is *B*, *C* and *D*

[Anna is brave, conscientious and diligent]

এ বাক্যে তিনটি বিধেয় অক্ষর *B*, *C*, *D*। যে বাক্যের কোনো পদ যৌগিক, যথা—সংযৌগিক বা বৈকল্পিক, সে বাক্য বহুবিধেয়ক। যথা—

Some *G* are *H* and *I* [Some girls are honest and intelligent]
All *P* are *F* or *K* [*A* palmist is either a fool or a knave]

এখানে প্রত্যেক বাক্যে তিনটি করে বিধেয় অক্ষর। আর "*H* and *I*" সংযৌগিক পদ, "*F* or *K*" বৈকল্পিক পদ।

এটা সহজবোধ্য যে, কোনো বহুবিধেয়ক বাক্যকে মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে হলে, প্রত্যেকটি বিধেয় অক্ষর নিয়ে ব্যক্তিবিষয়ক বা মুক্ত বাক্য গঠন করতে হবে। যথা—

a is *B*, *C* and $D = Ba.\ Ca.\ Da$

আর

Some *G* are *H* and *I*

-এর *G*, *H*, *I*—এদের প্রত্যেকটি নিয়ে এক একটি বাক্য গঠন করতে হবে। তাহলে এ বাক্যের সাংকেতিক রূপ হবে এমন

$\exists x[Gx \cdot (Hx \cdot Ix)]$ বা $\exists x(Gx \cdot Hx \cdot Ix)$]*

* যদি কোনো বাক্যে বা বাক্যাংশে একাধিক "·" থাকে তাহলে সংযৌগিকটির ভেতরকার বন্ধনী বাদ দেওয়া যায়।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে

All P are F or K

-এর সাংকেতিক রূপ হবে এমন

$$Ux[Px \supset (Fx \vee Kx)]$$

সেরকম

Tigers are fierce and dangerous $= Ux[Tx \supset (Fx \cdot Dx)]$
Some empiricists are atheists or agnostics $=$
$\exists x[Ex \cdot (Ax \vee Gx)]$*
Some authors are successful but not well read
$= \exists x[Ax \cdot (Sx \cdot \sim Wx)]$
$= \exists x[Ax \cdot Sx \cdot \sim Wx]$

৬. বিশেষ্য বিশেষণ দিয়ে গঠিত পদ

মনে রাখবে

> যে যৌগিক পদ একটি বিশেষ্য ও এক বা একাধিক বিশেষণ দিয়ে গঠিত বা যে পদে বিশেষ্যকে-বিশেষিত-করে-এমন বাক্যাংশ (যথা, that……, which……, who……) থাকে সে পদ সংযৌগিক।

যেমন, brave men, brave men who are honest—এসব সংযৌগিক পদ : brave men = brave and a man, brave men who are honest = brave and a man and honest। এখন, কোনো বাক্যে এ রকম পদ বৈয়াকরণ উদ্দেশ্য বা বিধেয় হিসাবে থাকলে, যৌগিক পদটির অবয়বগুলির প্রত্যেকটিকে বিধেয় পদ হিসাবে ব্যবহার করে সংযৌগিক বাক্য গঠন করতে হবে। যথা—

Anna is a brave girl $= Ba \cdot Ga$, বা
$Ga \cdot Ba$

সেরকম

Lions are dangerous animals

এ বাক্যের বৈয়াকরণ বিধেয় সংযৌগিক, সুতরাং—পদটি থেকে পাই '$Dx \cdot Ax$'—এ মুক্ত বাক্য। কাজেই উক্ত সার্বিক বাক্যটির সাংকেতিক রূপ হবে এমন :

$$Ux[Lx \supset (Dx \cdot Ax)]$$

আরও কয়টি উদাহরণ।

All American bankers are catholics $= Ux[(Ax \cdot Bx) \supset Cx]$
Mad dogs bite $= Ux[(Mx \cdot Dx) \supset Bx]$
No woman constables are virgins $= Ux[(Wx \cdot Cx) \supset \sim Vx]$
Every student who gets a first class Honours is awarded prize $=$
$Ux[(Sx \cdot Fx) \supset Px]$

* $Gx = x$ is an agnostic

All houses in Digha are cozy = $Ux[(Hx \cdot Dx) \supset Cx]$
All houses built of brick are warm and cozy =
$Ux[(Hx \cdot Bx) \supset (Wx \cdot Cx)]$
Only adult citizens are entitled to vote = $Ux[Vx \supset (Ax \cdot Cx)]$

৭. All F and G are H —আকারের বাক্য

একটা প্রশ্ন : All F and G are H—এ আকারের বাক্য, যথা

Apples and bananas are fruits

এ বাক্য, মানকলিপিতে ব্যক্ত করব কিভাবে ?

ধরা, এ বাক্যটি অনুবাদ করলে এভাবে :

For all x, (x is an apple · x is a banana) $\supset$ x is a fruit
$Ux[(Ax \cdot Bx) \supset Fx]$

এ অনুবাদটি কিন্তু মারাত্মকভাবে ভ্রান্ত। এতে বলা হল

যদি কোনো কিছু (যুগপৎ) আপেল এবং কলা হয় তাহলে তা হল ফল
সব আপেল-এবং-কলা হল ফল

কিন্তু এটা নিশ্চয়ই মূল বাক্যের বক্তব্য নয়। মূল বাক্য

Apples and bananas are fruits (1)

-এর আসল বক্তব্য হল :

All apples are fruits *and* all bananas are fruits

মানকলিপিতে

$$Ux(Ax \supset Fx) \cdot Ux(Bx \supset Fx) \quad (2)$$

কাজেই (1)-এর নির্ভুল অনুবাদ হল (2)।

এখন

$Ux(Ax \supset Fx) \cdot Ux(Bx \supset Fx)$ সম $Ux[(Ax \vee Bx) \supset Fx]$

আর ক্ষুদ্রতর সমার্থকটি ব্যবহার করে পাই

All apples and bananas are fruits =
$Ux[(Ax \vee Bx) \supset Fx]$

এ সূত্র দুটি মনে রাখবে :

$Ux(Fx \supset Hx) \cdot Ux(Gx \supset Hx)$ অসম $Ux[(Fx \cdot Gx) \supset Hx]$
$Ux(Fx \supset Hx) \cdot Ux(Gx \supset Hx)$ সম $Ux[(Fx \vee Gx) \supset Hx]$

তুলনীয়

$(p \supset r) \cdot (q \supset r)$ অসম $(p \cdot q) \supset r$
$(p \supset r) \cdot (q \supset r)$ সম $(p \vee q) \supset r$

শেষোক্ত বাক্য দুটি যে সমার্থক তা দেখানো হল

$(p \supset r) \cdot (q \supset r)$	
$(\sim p \vee r) \cdot (\sim q \vee r)$	[Def ⊃]
$(r \vee \sim p) \cdot (r \vee \sim q)$	[Con., Com.]
$r \vee (\sim p \cdot \sim q)$	[Dist.]
$(\sim p \cdot \sim q) \vee r$	[Com.]
$\sim(\sim p \cdot \sim q) \supset r$	[DN, Def ⊃]
$(p \vee q) \supset r$	[DM]

এত কথা বলার পর, আশা করি, "All *F* and *G* are *H*" আকারের বাক্য অনুবাদ করতে কখনও ভুল করবে না। মনে রেখো

$$\text{All } F \text{ and } G \text{ are } H = \text{U}x[(Fx \vee Gx) \supset Hx]$$

উদাহরণ

Doctors and lawyers are graduates = $\text{U}x[(Dx \vee Lx) \supset Gx]$

All butlers and valets are both obsequious and dignified $= \text{U}x[(Bx \vee Vx) \supset (Ox \cdot Dx)]$

Every boy and every girl is either a little liberal or else a little conservative $= \text{U}x[(Bx \vee Gx) \supset (Lx \vee Cx)]$

৮. H if / only if / if and only if / G

যে বাক্যের কোনো পদ সংযৌগিক বা বৈকল্পিক তা কি করে মানকলিপিতে ব্যক্ত করতে হয় তা আমরা দেখেছি। অনেক সময় এমন যৌগিক পদের সাক্ষাৎ পাবে যা *H* if *G*, *H* only if *G* ইত্যাদি আকারের। এরকম ক্ষেত্রে

> প্রথমে বৈয়াকরণ উদ্দেশ্য ও বিধেয় ঠিক করে নেবে এবং পদটি অবিকৃত রেখে বাক্যটিকে A, E, I, O-এর মানকিত রূপ দেবে ; তার পরবর্তী পর্বে যৌগিক পদটির অন্তর্গত যোজক অনুসারে পদের অবয়বগুলি নিয়ে বাক্য রচনা করবে।

উদাহরণ

Oranges are sweet if they are ripe
= U*x*[*x* is an orange ⊃ (*x* is sweet if *x* is ripe)]
$= \text{U}x[Ox \supset (Rx \supset Sx)]$

No medicine should be taken unless it is prescribed by physicians
= U*x*[*x* is a medicine ⊃ (∼*x* should be taken unless *x* is prescribed)]
$= \text{U}x[Mx \supset (\sim Tx \vee Px)]$

A man becomes angry only if his egoism is frustrated
= U*x*[*x* is a man ⊃ (*x* is angry only if *x*'s egoism is frustrated)]
$= \text{U}x[Mx \supset (Ax \supset Fx)]$

A class is finite if and only if it has a finite number of members
= Ux[x is a class ⊃ (x is finite if and only if x has finite number of members)]
$= Ux[Cx \supset (Fx \equiv Mx)]$
Some members are fighters if and only if they are officers
$= \exists x[Mx \cdot (Fx \equiv Ox)]$
Bees and wasp sting if they are either angry or frightened
= Ux{(x is a bee v x is a wasp) ⊃ (x stings if x is angry v x is frightened)}
$= Ux\{(Bx \vee Wx) \supset [(Ax \vee Fx) \supset Sx)]\}$
No coat is waterproof unless it is specially treated
= Ux[x is a coat ⊃ (~x is waterproof unless x is specially treated]
$= Ux[Cx \supset (\sim Wx \vee Sx)]$
No automobile that is ten year old will be repaired if it is severely damaged
= Ux[(x is an automobile · x is ten year old) ⊃ (~x will be repaired if x is severely damaged)
$= Ux[(Ax \cdot Ox) \supset (Dx \supset \sim Rx)]$

৯. All but S are P
All except S are P

মনে রাখবে

All but S are P (১)
All except S are P

এ বাক্যগুলির বক্তব্য হল

All non-S are P · No S are P (২)

(২)-কে মানকলিপিতে ব্যক্ত করে পাই

$Ux(\sim Sx \supset Px) \cdot Ux(Sx \supset \sim Px)$ (৩)

আবার (৩)-কে সংক্ষেপিত করে এর সমার্থক হিসাবে পাই

$Ux(\sim Sx \equiv Px)$ (৪)

সুতরাং বলতে পারি, (৪) হল (১)-সংখ্যক বাক্যগুলির মানকিত রূপ। যথা, বলতে পারি

All but S are $P = Ux(\sim Sx \equiv Px)$

All but employees are eligible=
$Ux(\sim Ex \equiv Lx)$
[Lx = x is eligible]

(৩) ও (৪) যে সমার্থক তা নিচে দেখানো হল

$$Ux(\sim Sx \supset Px) \cdot Ux(Sx \supset \sim Px)$$
$$\leftrightarrow Ux(\sim Sx \supset Px) \cdot Ux(\sim\sim Px \supset \sim Sx)$$

$$\leftrightarrow Ux(\sim Sx \supset Px) \cdot Ux\,(Px \supset \sim Sx)^*$$
$$\leftrightarrow Ux(\sim Sx \equiv Px)$$

মানকলিপিতে অনুবাদের আরও কয়টি উদাহরণ

(1) A person who is either a bachelor or widower is happy if and only if he does not fall in love

$$= Ux\{[Px \cdot (Bx \vee Wx)] \supset (Hx \equiv \sim Lx)\}$$

[$Px = x$ is a person]

(2) No student who is lazy will prepare his lessons or take examination, if not coached by a tutor

$$(x)\,\{(Sx \cdot Lx) \supset [\sim Cx \supset \sim (Px \vee Tx)]\}$$

(3) No M.A. will be appointed university teacher or college teacher who is above 35 years of age or is not an Hons. graduate*

= No M.A. who is either above 35 years of age or is not an Hons. graduate will be appointed......

$$Ux\{[Mx \cdot (Ax \vee \sim Hx)] \supset \sim(Cx \vee Ux)\}$$

(4) Certain university teachers are in the habit of either criticizing in their class their competent colleagues or avoid taking classes *who* themselves are neither brilliant nor interested in the welfare of the students but lazy and meanminded**

= Certain university teachers who themselves...are in the habit of...

$$= \exists x\{[Ux \cdot (\sim Bx \cdot \sim Wx) \cdot (Lx \cdot Mx)] \cdot (Cx \vee Ax)\}$$

(5) Some chemicals which are acids or bases taste bitter only if they are not sweet

$$= \exists x\{[Cx \cdot (Ax \vee Bx)] \cdot Tx \supset \sim Sx)\}$$

(6) Each man and woman is equal under the law except those not having citizenship

$$= Ux\{[(Mx \vee Wx) \supset Ex] \equiv \sim \sim Cx\}$$

(7) If Jyoti Basu speaks, every member present at the meeting listens to him with rapt attention

$$= Sj \supset Ux[(Mx \cdot Px) \supset Lx]$$

---

* পরে দেখব : $UxFx \cdot UxGx$ সম $Ux(Fx \cdot Gx)$

* এখানে "who" অন্বিত হবে "M.A."-এর সঙ্গে।

** এখানে "who" অন্বিত হবে "university teachers"-এর সঙ্গে।

অনুশীলনী

১. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে মানকলিপিতে ব্যক্ত কর :

1. Everything is mental or physical
2. Everything is mental or everything is physical
3. Something is both mental and physical
4. Something is mental and something is physical
5. Everything is mental and not everything is physical
6. Something is mental or everything is physical
7. Everything is mental and nothing is physical

২. নিচে দুটি বাক্য ও এদের সাংকেতিক রূপ দিয়ে দেওয়া হল। বল, কোন্ রূপটি কোন্ বাক্যের সাংকেতিক রূপ।

1. John cannot outrun any man on the team
2. John cannot outrun every man on the team
3. $\exists x$(x is a man on the team · ~ John can outrun x)
4. Ux(x is a man on the team ⊃ ~ John can outrun x)

—বাক্যগুলি Quine থেকে

৩. নিম্নোক্ত বাক্যজোড়গুলি লক্ষ কর। বল, কোন্ জোড়ের বাক্য সমার্থক, কোন জোড়ের অসমার্থক ?

(1)

London is big and noisy
London is big and London is noisy

(2)

Something is a book and is boring
Something is a book and something is boring

(3)

Smith can outplay any member of the team
Smith outplay every member of the team

(4)

Everything is red or not red
Everything is red or everything is not-red

—বাক্যগুলি Quine থেকে

৪. Ux($Fx \supset Gx$) আর Ux($Fx \cdot Gx$)
$\exists x(Fx \cdot Gx)$ আর $\exists x(Fx \supset Gx)$
-এর পার্থক্য দেখাও।

৫. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে ইংরেজিতে অনুবাদ কর।

এখানে B — is a bird
F — can fly
M — is a mammal

1. $\exists x(Bx \cdot Fx)$	2. $\exists y(By \cdot \sim Fy)$
3. $Uz(Bz \supset Fz)$	4. $Ux(Bx \supset \sim Mx)$
5. $\sim Uy(My \supset Fy)$	6. $\exists x(Mx \cdot Fx)$
7. $\exists y(\sim Fy \cdot My)$	8. $\exists x[(Bx \cdot Fx) \cdot \sim Mx]$
9. $Uz[Bz \supset \sim(Fz \cdot Mz)]$	10. $Ux[(Fx \cdot Mx) \supset \sim Bx]$

—Barker

৬. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে মানকলিপিতে ব্যক্ত কর।

(1) It is not the case that something mental is immortal.
(2) Anything is physical if and only if it is not immortal.
(3) Some astrologers who are nonphysicists are not scientific thinkers.
(4) All physicists who are astrologers are non-scientific thinkers.

—Barker

(5) Employees may use only the service elevator.
(6) Only employees may use the service elevator.
(7) Not every person who talks a great deal has a great deal to say.
(8) It is not true that every watch will keep good time if and only if it is wound regularly and not abused.

—Copi

(9) Any act is good but a selfish or harmful one.
(10) That certain metals are conductors is a sufficient condition for some things being either electrical conductors or insulators.
(11) If all metals expand whenever heated, then heated copper expands.
(12) No philosopher is a sense-data theorist who is convinced by the arguments of J. L. Austin if he has read *Sense and Sensibilia*.
(13) Any Euclidian figure is such that if it is a triangle, then it has equal angles, if and only if, it also has equal sides.

—Harrison

(14) Some, though not all, poets write novels.
(15) Either all the Smiths will accept invitation or none of them will.
(16) All substances are destructible except simple ones.

—Hughes & Londey

(17) Nothing is a dog unless it is an animal.

(18) Among snakes, only copperheads and rattlers are poisonous.
(19) If those who believe in God have immortal souls, then, given that God exists, they will have eternal bliss.
—Kalish & Montague
(20) Doctors who are poor are non-existent.
(21) Doctors who are poor are honest.
(22) Doctors and lawyers who are rich are admired only if they are also honest.
(23) All young people are attractive except those who giggle.
(24) Someone can get into the club if he is rich or knows the right people, unless he is black.
(25) Students work hard if they are well-motivated and challenged ; otherwise they do not.
—Leblanc and Wisdom
(26) Some logic students are either logical or illogical.
(27) Brown is illogical provided that not any student is logical.
(28) He jests at scars that never felt a wound.
—Scheer and Carney

৭. নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে ইংরেজিতে অনুবাদ কর। এখানে

F = is an even number
G = is a prime number
H = is honest
J = is a person
P = 2 is a prime number
Q = 4 is prime number
R = the son of Lysimachus is honest

(i) $\text{U}x[(Jx \cdot Hx) \supset R]$
(ii) $P \supset \exists x(Fx \cdot Gx)$
(iv) $Q \equiv \text{U}x(Fx \supset Gx)$
(v) $\exists x(Fx \cdot Gx) \supset P$
—Kalish & Montague

৮. Paraphrase the following into a quantification of a conjunction of seven open sentences :

I was carrying and scrutinizing a square green package the origin and contents of which were altogether unknown to me. —Quine

মানকিত বাক্যের সমার্থক ও বিরুদ্ধ বাক্য

১. Ux ও ∃x-এর সম্পর্ক

Ux আর $\exists x$-এর সম্পর্ক বোঝা সহজ হবে যদি প্রথমে সমার্থতা ও বিরুদ্ধতার সম্পর্ক বুঝে নিই।

দুটি বাক্য যদি সমার্থক হয়, তাহলে
এদের একটিকে নিষেধ করে অন্যটির বিরুদ্ধ বাক্য পাওয়া যায়।

উদাহরণ

আমরা জানি

p আর $\sim\sim p$ সমার্থক (১)

সুতরাং বলতে পারি

$\sim p$ আর $\sim\sim p$ পরস্পরের বিরুদ্ধ [(১)-এর বামধার নিষেধ করে]
p আর $\sim\sim\sim p$ পরস্পরের বিরুদ্ধ [(১)-এর ডানধার নিষেধ করে]

তারপর

দুটি বাক্য যদি পরস্পরের বিরুদ্ধ হয়, তাহলে
এদের একটিকে নিষেধ করে অন্যটির সমার্থক পাওয়া যায়।

উদাহরণ

আমরা জানি

p আর $\sim p$ পরস্পরের বিরুদ্ধ (২)

সুতরাং বলতে পারি

$\sim p$ আর $\sim p$ সমার্থক [(২)-এর বামধার নিষেধ করে]
p আর $\sim\sim p$ সমার্থক [(২)-এর ডানধার নিষেধ করে]

বা সূত্রাকারে বলতে পারি

P বিরুদ্ধ Q equiv. $\sim P$ সম Q
equiv. P সম $\sim Q$

লক্ষণীয়

P সম $\sim Q$ equiv. $\sim P$ সম Q

এ সূত্রগুলি প্রয়োগের আরও উদাহরণ।

All S are P বিরুদ্ধ Some S are not P

∴ ~(All S are P) সম Some S are not P

∴ All S are P সম ~(Some S are not P)

আবার

No S are P বিরুদ্ধ Some S are P

∴ ~(No S are P) সম Some S are P

∴ No S are P সম ~(Some S are P)

আমরা জানি

All S are P বিরুদ্ধ Some S are not P

মানকলিপিতে

$Ux\,(Sx \supset Px)$ বিরুদ্ধ $\exists x(Sx \cdot \sim Px)$

সুতরাং বলতে পারি

$\sim Ux(Sx \supset Px)$ সম $\exists x(Sx \cdot \sim Px)$

এ সমার্থতা বাক্যের দু ধারকে সমার্থকে রূপান্তরিত করে পাই

	$\sim Ux(Sx \supset Px)$	(1)		$\exists x(Sx \cdot \sim Px)$	(১)
$\leftrightarrow$	$\sim Ux(\sim Sx \vee Px)$	(2) Def $\supset$	$\leftrightarrow$	$\exists x \sim(\sim Sx \vee Px)$	(২) DM, DN
$\leftrightarrow$	$\sim Ux \sim(Sx \cdot \sim Px)$	(3) DM, DN	$\leftrightarrow$	$\exists x \sim(Sx \supset Px)$	(৩) Def $\supset$*

বলা বাহুল্য, উক্ত প্রত্যেক সারির বাক্য জোড় সমার্থক, এবং প্রত্যেক স্তম্ভের বাক্যগুলিও সমার্থক। বিশেষত (১) $\leftrightarrow$ (3), আর (1) $\leftrightarrow$ (৩); তার মানে

$$\exists x(Sx \cdot \sim Px) \leftrightarrow \sim Ux \sim(Sx \cdot \sim Px) \qquad \text{I}$$
$$\sim Ux(Sx \supset Px) \leftrightarrow \exists x \sim(Sx \supset Px) \qquad \text{II}$$

আবার

$Ux(Sx \supset Px)$ বিরুদ্ধ $\exists x(Sx \cdot \sim Px)$

এ বাক্য থেকে পাই নিম্নোক্ত সমার্থতা

$Ux(Sx \supset Px)$ সম $\sim \exists x(Sx \cdot \sim Px)$

এ সমার্থতা বাক্যের দু ধারকে সমার্থকে রূপান্তরিত করে পাই

	$Ux(Sx \supset Px)$	(1)		$\sim \exists x(Sx \cdot \sim Px)$	(১)
$\leftrightarrow$	$Ux\,(\sim Sx \vee Px)$	(2)	$\leftrightarrow$	$\sim \exists x \sim(\sim Sx \vee Px)$	(২)
$\leftrightarrow$	$Ux \sim(Sx \cdot \sim Px)$	(3)	$\leftrightarrow$	$\sim \exists x \sim(Sx \supset Px)$	(৩)

---

* লক্ষণীয়, "সমার্থক"-এর সংক্ষেপক হিসাবে আমরা "সম"ও ব্যবহার করেছি, আবার "$\leftrightarrow$" চিহ্নটিও ব্যবহার করেছি।

এ অবরোহ দুটির অন্তর্ভুক্ত প্রত্যেকটি বাক্য প্রত্যেকটির সমার্থক। বিশেষত (1) ↔ (৩), আর (১) ↔ (3)। তার মানে

$$\mathrm{U}x(Sx \supset Px) \leftrightarrow \sim\exists x \sim(Sx \supset Px) \qquad \text{III}$$
$$\sim\exists x(Sx \cdot \sim Px) \leftrightarrow \mathrm{U}x \sim(Sx \cdot \sim Px) \qquad \text{IV}$$

উপরোক্ত মানকবদ্ধ বাক্যগুলিতে Px-এর জায়গায় $\sim Px$ ($\sim Px$-এর জায়গায় Px) লিখলে পাওয়া যাবে আরও কয়টি সমার্থতা বাক্য—যার মূলে আছে এ সত্য : E-এর বিরুদ্ধ I, মানে : E সম $\sim I$, $\sim E$ সম I। নিচে এ সমার্থতাগুলি নিষ্কাশন করে দেখানো হল।

No S are P বিরুদ্ধ Some S are P

মানকলিপিতে

$$\mathrm{U}x(Sx \supset \sim Px) \text{ বিরুদ্ধ } \exists x(Sx \cdot Px)$$

সুতরাং

$$\sim\mathrm{U}x(Sx \supset \sim Px) \text{ সম } \exists x(Sx \cdot Px)$$

এখন, এ সমার্থতা বাক্যের দু ধারকে সমার্থকে রূপান্তরিত করে পাই

	$\sim\mathrm{U}x(Sx \supset \sim Px)$	(1)		$\exists x(Sx \cdot Px)$	(১)
↔	$\sim\mathrm{U}x(\sim Sx \vee \sim Px)$	(2)	↔	$\exists x \sim(\sim Sx \vee \sim Px)$	(২)
↔	$\sim\mathrm{U}x \sim(Sx \cdot Px)$	(3)	↔	$\exists x \sim(Sx \supset \sim Px)$	(৩)

এ অবরোহ দুটির অন্তর্ভুক্ত প্রত্যেকটি বাক্য প্রত্যেকটির সমার্থক। বিশেষত (১) ↔ (3), আর (1) ↔ (৩)। মানে

$$\exists x(Sx \cdot Px) \leftrightarrow \sim\mathrm{U}x \sim(Sx \cdot Px) \qquad \text{I}'$$
$$\sim\mathrm{U}x(Sx \supset \sim Px) \leftrightarrow \exists x \sim(Sx \supset \sim Px) \qquad \text{II}'$$

আবার

$$\mathrm{U}x(Sx \supset \sim Px) \text{ সম } \sim\exists x(Sx \cdot Px)$$

এ সমার্থতা বাক্যের দু ধারকে সমার্থকে রূপান্তরিত করে পাই

	$\mathrm{U}x(Sx \supset \sim Px)$	(1)		$\sim\exists x(Sx \cdot Px)$	(১)
↔	$\mathrm{U}x(\sim Sx \vee \sim Px)$	(2)	↔	$\sim\exists x \sim(\sim Sx \vee \sim Px)$	(২)
↔	$\mathrm{U}x \sim(Sx \cdot Px)$	(3)	↔	$\sim\exists x \sim(Sx \supset \sim Px)$	(৩)

এ অবরোহের প্রত্যেকটি বাক্য প্রত্যেকটির সমার্থক, বিশেষত (1) ↔ (৩), (১) ↔ (3)। তার মানে

$$\mathrm{U}x(Sx \supset \sim Px) \leftrightarrow \sim\exists x \sim(Sx \supset \sim Px) \qquad \text{III}'$$
$$\sim\exists x(Sx \cdot Px) \leftrightarrow \mathrm{U}x \sim(Sx \cdot Px) \qquad \text{IV}'$$

২. সমার্থতা সূত্র : QE

সমার্থতা বাক্য I, II, I′ প্রভৃতির দু ধার লক্ষ কর। দেখবে "↔"-এর দু ধারের বাক্যে মানকের পরবর্তী অংশ অভিন্ন। এ কথাটা মনে রাখলে, এ অংশের বদলে "(......)" ব্যবহার করে সমার্থতা বাক্যগুলি এভাবে দেখানো যায়।

সমার্থতা সূত্র

$$\text{I.}\quad Ux(\cdots\cdots) \leftrightarrow \sim\exists x\sim(\cdots\cdots)$$

$$\text{II.}\quad \exists x(\cdots\cdots) \leftrightarrow \sim Ux\sim(\cdots\cdots)$$

$$\text{III.}\quad \sim Ux(\cdots\cdots) \leftrightarrow \exists x\sim(\cdots\cdots)$$

$$\text{IV.}\quad \sim\exists x(\cdots\cdots) \leftrightarrow Ux\sim(\cdots\cdots)$$

মনে রাখতে হবে, এ সারণীর প্রত্যেক ছত্রের "(......)" দুটি যে-মুক্ত-বাক্য বোঝাচ্ছে তা অভিন্ন।

এ চারটি সমার্থতা সূত্রকে বলে মানক বিনিময় সূত্র—Rule of Quantifier Exchange, সংক্ষেপে QE সূত্র। বলা বাহুল্য, এ সূত্রগুলির গুরুত্ব হল এই : এগুলির ভিত্তিতে মানকবদ্ধবাক্য বা তার নিষেধকে সমার্থকে রূপান্তরিত করা যায়। এগুলির ভিত্তিতে বাক্য রূপান্তর করতে হলে নিম্নোক্ত অনুজ্ঞাটি মেনে চলবে।

> যদি কেনো বাক্যের মানক পরিবর্তন করতে চাও তাহলে মানকটির ডাইনে বামে—দু ধারেই '~' যোগ কর, এবং মানকটি পাল্টে দাও (আর নতুন মানকটির কোনো ধারে '~ ~' পেলে DN অনুসারে '~ ~' বর্জন কর)।

উদাহরণ

$$Ux(Ax \supset Bx) \leftrightarrow \sim\exists x\sim(Ax \supset Bx)$$

$$\sim\exists x(Ax \cdot Bx) \leftrightarrow \sim\sim Ux\sim(Ax \cdot Bx) \leftrightarrow Ux\sim(Ax \cdot Bx)$$

$$Ux\sim(Ax \cdot Bx) \leftrightarrow \sim\exists x\sim\sim(Ax \cdot Bx) \leftrightarrow \sim\exists x(Ax \cdot Bx)$$

উক্ত চারটি সূত্রের মধ্যে আমরা পরবর্তী অধ্যায়ে ব্যবহার করব কেবল III আর IV। এ সূত্র দুটি নির্ভুলভাবে প্রয়োগ করতে পারবে যদি নিম্নোক্ত অনুজ্ঞাটি মেনে চল :

> কোনো মানকের বামধারে '~' থাকলে,
> যদি মানকটিকে '~'-মুক্ত করতে চাও তাহলে
> বামের '~' চিহ্নটিকে মানকটির ডাইনে সরাও, এবং মানকটি পাল্টে দাও।

এ প্রসঙ্গে একটা কথা : এটা সহজবোধ্য যে

> Ux বা $\exists x$-এর বামে '~' যুক্ত করলে মানকটিকে নিষেধ করা হয় না, নিষেধ করা হয় '~'-এর পরবর্তী সমগ্র মানকিত বাক্যটি।

———হুল্য, For all x, There is an x such that, Ux, $\exists x$ এসব বাক্যাংশ নিষেধের
* প্রশ্ন উঠে না ; নিষেধিত হতে পারে পূর্ণ বাক্য—বদ্ধ বা মুক্ত বাক্য। একটা উদাহরণ :
চিহ্ন

$$\sim Ux[(Fx : Gx) \supset Hx]$$

এ বাক্যে "~" দিয়ে নিষেধিত হয়েছে '~'-এর পরবর্তী বদ্ধ বাক্যটি। এ বাক্যের বক্তব্য

It is not the case that $Ux[(Fx \cdot Gx) \supset Hx]$

তুমি হয়ত ভাবছ: এ কথা বোঝাবার জন্য উক্ত বাক্যটি বন্ধনী দিয়ে এভাবে লেখা উচিত

$$\sim\{ Ux[(Fx \cdot Gx) \supset Hx] \}$$

কিন্তু এরকম বাক্যে এভাবে বন্ধনী দেওয়ার কোনো প্রয়োজন নেই। কেননা '~'-এর পর কেবল একটি বাক্যই আছে, আর প্রচলিত রীতি অনুসারে '~' এর অব্যবহিত পরবর্তী বাক্যকে প্রভাবিত করে। আর একটা উদাহরণ।

$$\sim\exists x(Fx \supset Gx) \cdot \sim\exists x(Fx \cdot \sim Gx)$$

এ বাক্যের প্রথম '~' নিষেধ করছে '$\exists x(Fx \supset Gx)$'-কে, দ্বিতীয় '~' '$\exists x(Fx \cdot \sim Gx)$'-কে। ধর

$$UxFx \supset Gx$$

এ বাক্য নিষেধ করতে চাই। তাহলে কিন্তু বন্ধনীর দরকার হবে, লিখতে হবে

$$\sim(UxFx \supset Gx)$$

এ বাক্য আর নিম্নোক্ত বাক্যটির পার্থক্য লক্ষ কর

$$\sim UxFx \supset Gx$$

আর একটা কথা। মনে রাখবে

$\sim Ux$ (......) আকারের বাক্য সার্বিক বাক্য নয়,

সার্বিকের নিষেধ

$\sim\exists x$ (......) আকারের বাক্য সাত্তিক বাক্য নয়,

সাত্তিকের নিষেধ।

স্কুলপাঠ্য যুক্তিবিজ্ঞানের সঙ্গে যাদের পরিচয় আছে তারাই জানে যে

All S are not P (১)

বা Not all S are P (১')

এ বাক্যের যুক্তিবিজ্ঞানসম্মত রূপ

Some S are not P (২)

কেন (১) বা (১')-কে (২)-এতে রূপান্তরিত করতে হয় QE প্রয়োগ করে তা ব্যাখ্যা করা যায়।

Not all S are P = ~(all S are P), বা

$$\sim Ux(Sx \supset Px)$$
$$\leftrightarrow \exists x \sim(Sx \supset Px) \quad \text{(QE)}$$
$$\leftrightarrow \exists x \sim(\sim Sx \vee Px)$$
$$\leftrightarrow \exists x(Sx \cdot \sim Px)$$

= Some S are not P

এ প্রসঙ্গে দু একটা প্রশ্ন।

প্রশ্ন : Some S are P-কে নিষেধ করে কি
Some S are not P পাওয়া যায় ?

প্রশ্নটা এভাবেও করা যেত :

$\sim$(Some S are P) আর
Some S are not P কি সমার্থক ?

উত্তর : না। কেন এ উত্তর দেওয়া হল, তা দেখ।

$\sim$(Some S are P)
$= \sim \exists x(Sx \cdot Px)$
$\leftrightarrow Ux \sim (Sx \cdot Px)$ (QE)
$\leftrightarrow Ux(\sim Sx \vee \sim Px)$
$\leftrightarrow Ux(Sx \supset \sim Px)$
$=$ No S are P

প্রশ্ন : There are no S which are not P

এ আকারের বাক্যকে যুক্তিবিজ্ঞানসম্মত আকারে রূপান্তরিত করবে কিভাবে ?

উত্তর :

There are no S which are not P (১)

এ বাক্য হল

There are S which are non-P (১′)

-এর নিষেধ। মানে (১)=

It is false that there are S which are non-P

বা It is false that $\exists x(Sx \cdot \sim Px)$

বা $\sim \exists x(Sx \cdot \sim Px)$

এখন

$\sim \exists x(Sx \cdot \sim Px)$
$\leftrightarrow Ux \sim (Sx \cdot \sim Px)$
$\leftrightarrow Ux(\sim Sx \vee \sim \sim Px)$
$\leftrightarrow Ux(Sx \supset \sim \sim Px) =$ No S are non-P
$\leftrightarrow Ux(Sx \supset Px)$ $=$ All S are P

$\therefore$ There are no S which are not $P =$ All S are P

মনে রাখবে

There are no......
$= \sim \exists x$ (.........)
$\leftrightarrow$ $Ux \sim$(.........)

৩. Ux-বদ্ধ ও ∃x-বদ্ধ বাক্যের বিরুদ্ধ গঠন

যে সমার্থতা সূত্রগুলি ব্যাখ্যা করা হয়েছে সেগুলির সাহায্যে কোনো মানকিত বাক্যের বিরুদ্ধকে অপেক্ষাকৃত সরল আকারে (মানককে "~" মুক্ত করে) ব্যক্ত করা যায়। যেমন

$$\begin{aligned} Ux(Fx \supset Gx)\text{-এর বিরুদ্ধ } & \sim Ux(Fx \supset Gx) \\ & \leftrightarrow \exists x \sim (Fx \supset Gx) \\ & \leftrightarrow \exists x(Fx \cdot \sim Gx) \end{aligned}$$

সুতরাং সরাসরি বলতে পারি

$$Ux(Fx \supset Gx)\text{-এর বিরুদ্ধ : } \exists x(Fx \cdot \sim Gx)$$

নিচের সারণীতে A, E, I, O-এর বিরুদ্ধ দেখানো হল।

মূল বাক্য	'~'-যুক্ত বিরুদ্ধ		'~'-মুক্ত বিরুদ্ধ
$Ux(Fx \supset Gx)$	$\sim Ux(Fx \supset Gx)$	$\leftrightarrow \exists x \sim (Fx \supset Gx)$	$\leftrightarrow \exists x (Fx \cdot \sim Gx)$
$Ux(Fx \supset \sim Gx)$	$\sim Ux(Fx \supset \sim Gx)$	$\leftrightarrow \exists x \sim (Fx \supset \sim Gx)$	$\leftrightarrow \exists x(Fx \cdot Gx)$
$\exists x(Fx \cdot Gx)$	$\sim \exists x(Fx \cdot Gx)$	$\leftrightarrow Ux \sim (Fx \cdot Gx)$	$\leftrightarrow Ux(Fx \supset \sim Gx)$
$\exists x(Fx \cdot \sim Gx)$	$\sim \exists x(Fx \cdot \sim Gx)$	$\leftrightarrow Ux \sim (Fx \cdot \sim Gx)$	$\leftrightarrow Ux(Fx \supset Gx)$

অনুরূপভাবে

মূল বাক্য	বিরুদ্ধ	মূলবাক্য	বিরুদ্ধ
$UxFx$	$\exists x \sim Fx$	$Ux \sim Fx$	$\exists xFx$
$\exists xFx$	$Ux \sim Fx$	$\exists x \sim Fx$	$UxFx$

পৃঃ ৩০-এতে এ অনুবাদগুলি দেওয়া আছে :

(1) Not everything is material $= \exists x \sim Mx$
(2) There are no ghosts $= Ux \sim Gx$
(3) Ghosts do not exist $= Ux \sim Gx$

কেন বাক্যগুলিকে এভাবে অনুবাদ করা দরকার তার একটা নতুন ব্যাখ্যা দিতে পারি।

(1′) Everything is material $= UxMx$

∴ Not everything is material বা

$\sim$(Everything is material) $= \sim UxMx \leftrightarrow \exists x \sim Mx$

(2′) There are ghosts $= \exists xGx$

∴ There are no ghosts বা

$\sim$(There are ghosts) $= \sim \exists xGx \leftrightarrow Ux \sim Gx$

(3′) Ghosts exist $= \exists xGx$

∴ Ghosts do not exist বা

$\sim$(Ghosts exist) $= \sim \exists xGx \leftrightarrow Ux \sim Gx$

অনুশীলনী

১. Which of the following sentences are equivalent to one another. Try to translate each sentence into good English.

1. $\mathrm{U}x(x$ is mental $\vee$ x is physical$)$
2. $\mathrm{U}x(x$ is mental$)$ $\vee$ $\mathrm{U}x(x$ is physical$)$
3. $\exists x(x$ is mental $\vee$ x is physical$)$
4. $\sim\exists x\sim(x$ is mental $\vee$ x is physical$)$
5. $\exists x(x$ is mental$)$ $\vee$ $\exists x(x$ is physical$)$
6. $\sim\exists x\sim(x$ is mental$)$ $\vee$ $\mathrm{U}x$ $(x$ is physical$)$
7. $\sim\mathrm{U}x\sim(x$ is mental $\vee$ x is physical$)$

২. নিচেকার প্রত্যেকটি যুক্তির হেতুবাক্য থেকে এর সিদ্ধান্তটি নিষ্কাশন কর।

(১) $\mathrm{U}xFx \supset \exists xFx$

$\therefore\ \mathrm{U}x\sim Fx \supset \exists x\sim Fx$

(২) $\mathrm{U}x\sim Fx$

$\exists yGy \supset \exists xFx$

$\therefore\ \mathrm{U}y\sim Gy$

(৩) $\exists x \sim(Fx \cdot Gx)$

$\sim\mathrm{U}x\ (Fx \cdot Gx) \supset \sim\mathrm{U}zHz$

$\exists z\sim Hz \supset \mathrm{U}yGy$

$\therefore\ \sim\exists y\sim Gy$

(৪) $\exists x(Fx \cdot Gx) \supset \mathrm{U}y\sim(Hy \supset Ky)$

$\exists y(Hy \supset Ky)$

$\therefore\ \mathrm{U}x(Fx \supset \sim Gx)$

(৫) $\exists x\sim(\sim Fx \vee \sim Gx) \supset \mathrm{U}y(Hy \supset Iy)$

$\exists y(Hy \cdot \sim Iy)$

$\therefore\ \mathrm{U}x(Fx \supset \sim Gx)$

৩. For each of the following find a formula logically equivalent to the given one such that the equivalent contains no negation sign prefacing parentheses, brackets and braces.

1. $\sim\mathrm{U}x(Sx \supset Tx)$
2. $\sim\mathrm{U}x(\sim Sx \supset Tx)$
3. $\sim\exists x(Ax \cdot Bx)$
4. $\sim\exists x(Ax \cdot \sim Bx)$
5. $\sim\exists x\sim(Ax \cdot Bx)$
6. $\sim\exists x\sim[(Ax \vee Bx) \cdot Cx]$
7. $\sim\mathrm{U}x\sim(\sim Fx \cdot \sim Gx)$
8. $\sim\exists x(\sim Fx \vee Gx)$
9. $\sim\mathrm{U}x\sim(\sim Fx \supset Gx)$
10. $\sim\mathrm{U}x\sim[(Ax \cdot Bx) \supset Cx]$

৬

প্রমাণ পদ্ধতি ঃ
মুখ্য অবরোহী পদ্ধতি

১. ভূমিকা

অবরোহী পদ্ধতি প্রয়োগ করে কি করে বাক্য যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা যায় তা আমরা জানি। ঐ পদ্ধতি দিয়ে কিভাবে বিধেয় যুক্তির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ গঠন করা যায়—এখন তাই বলব।

বাক্য যুক্তির বৈধতা প্রমাণের জন্য দরকার কতকগুলি গৃহীত যুক্তিবিধি ও রূপান্তর সূত্র। বিধেয় যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করতে হলেও এ সব সূত্র ও বিধির সাহায্য নিতে হয়। দেখা যাবে, বিধেয় যুক্তির জন্য আরও দরকার মানক সংক্রান্ত কয়েকটি অতিরিক্ত বিধি ও সূত্র।

আমরা অবরোহী প্রমাণ পদ্ধতির দুটি রূপ ব্যাখ্যা করব। একটি রূপের নাম দেওয়া যায় মুখ্য পদ্ধতি, অন্যটির প্রচলিত পদ্ধতি। নাম দুটি লক্ষ কর। দেখ, 'মুখ্য' আর 'প্রচলিত'—এ কথা দুটির মধ্যে কোনো বিরোধ নেই। এবং দেখা যাবে, মুখ্য পদ্ধতি ও প্রচলিত পদ্ধতির মধ্যেও কোনো বিরোধ নেই। এমন কি বলতে পারি, এগুলি স্বতন্ত্র পদ্ধতিও নয়। তবু এদের পৃথকভাবে আলোচনা করা ভাল, বলে মনে হয়। এ অধ্যায়ে আলোচনা করব মুখ্য পদ্ধতি, আর পরবর্তী অধ্যায়ে প্রচলিত পদ্ধতি।

এখন, নিম্নোক্ত প্রায়শ-উদ্ধৃত ন্যায়টি লক্ষ কর।

সব মানুষ মরণশীল,	$\mathrm{U}x(Hx \supset Mx)$
সক্রেটিস্ মানুষ ;	Hs
∴ সক্রেটিস্ মরণশীল।	∴ Ms

[x মানুষ $= Hx$
x মরণশীল $= Mx$
সক্রেটিস্ $= s$]

এ যুক্তির হেতুবাক্য থেকে সিদ্ধান্তটি নিষ্কাশন করব কি করে? দেখ, মানকলিপিতে-ব্যক্ত রূপটিতে কোনো মধ্যবাক্য নেই। আর মধ্যবাক্য ছাড়া মাধ্যম যুক্তির হেতুবাক্য থেকে সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা যায় না।

এটা সহজবোধ্য যে

$$\mathrm{U}x(Hx \supset Mx)$$

যদি সত্য হয় তাহলে

$$Hs \supset Ms$$

অবশ্যই সত্য, সহজবোধ্য যে—সার্বিক বাক্যটি থেকে ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যটি বৈধভাবে নিষ্কাশন করা যায়। আর '$Ux(Hx \supset Mx)$' থেকে যদি '$Hs \supset Ms$' নিষ্কাশন করা যায় তাহলে

$Hs \supset Ms$, আর

Hs

যুক্ত করে MP-এর সাহায্যে সহজেই প্রদত্ত সিদ্ধান্ত Ms পেয়ে যেতে পারি।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে, উক্তরূপ ন্যায়ের বৈধতা প্রমাণের জন্য দরকার এমন যুক্তিবিধি যার সাহায্যে, ধর, '$Ux(Hx \supset Mx)$' থেকে '$Hs \supset Ms$' নিষ্কাশন করা যায়। যে যুক্তিবিধি এরূপ নিষ্কাশন অনুমোদন করে সে বিধিটি ব্যাখ্যা করতে যাচ্ছি। তার আগে, দৃষ্টান্তীকরণ (instantiation), মানে নিবেশনদৃষ্টান্ত প্রদর্শন, সম্পর্কে দু একটা কথা বলে নেওয়া ভাল।

উদাহরণ হিসাবে

$Fx \supset Gx$

এ মুক্ত বাক্যটি নেওয়া যাক। দৃষ্টান্তীকরণের জন্য a, b, c—এ নামগুলি ব্যবহার করে এর থেকে পাই

$Fa \supset Ga$, $Fb \supset Gb$, $Fc \supset Gc$

এগুলি '$Fx \supset Gx$'-এর নিবেশন দৃষ্টান্ত। এবার এ বাক্যগুলি লক্ষ কর ঃ

$Fa \supset Gx$, $Fx \supset Ga$

এসব কিন্তু '$Fx \supset Gx$'-এর নিবেশন দৃষ্টান্ত বলে গণ্য নয়। কেননা, নিবেশন হবে পরিপূর্ণ, মানে—কোনো মুক্তবাক্য থেকে এর নিবেশন দৃষ্টান্ত পেতে হলে মুক্ত গ্রাহকটি যেখানে যেখানে আছে সেখানে সেখানে নির্বাচিত নামটি বসাতে হবে। শেষোক্ত বাক্য দুটিতে 'x' লক্ষণীয়। এ 'x'-এর জায়গায় যদি a বসানো হত তাহলে বাক্য দুটি $Fx \supset Gx$-এর নিবেশন দৃষ্টান্ত বলে গণ্য হত। এবার এ বাক্যটি লক্ষ কর ঃ

$Fa \supset Gb$

এটিও '$Fx \supset Gx$'-এর নিবেশন দৃষ্টান্ত নয়। কেননা, নিবেশন হবে একরূপ, মানে কোনো মুক্ত বাক্য থেকে এর নিবেশন দৃষ্টান্ত পেতে হলে মুক্ত গ্রাহকটি যেখানে যেখানে আছে সেখানে সেখানে একই নির্বাচিত নাম বসাতে হবে। দেখ, উক্ত বাক্যে '$Fx \supset Gx$'-এর প্রথম x-এর জায়গায় বসানো হয়েছে a, দ্বিতীয় 'x'-এর জায়গায় b।

$Fx \supset Gx$, $Fy \supset Gy$

এ রকম মুক্ত বাক্য Ux, Uy বদ্ধ হলে যে সার্বিক মানকবদ্ধ বাক্য পাই এখন আমরা তার দৃষ্টান্তীকরণের কথা বলতে যাচ্ছি। Ux-বদ্ধ বা Uy-বদ্ধ বাক্যের দৃষ্টান্ত পেতে হলে

মানকটি বর্জন করতে হবে, এবং

গ্রাহক প্রতীক x, y-এর জায়গায় কোনো নির্বাচিত নাম নিবেশন করতে হবে,

নিবেশন করতে হবে—একরূপ নিবেশন ও
পরিপূর্ণ নিবেশনের নিয়ম অনুসারে।

এখন আমরা প্রত্যাশিত যুক্তিবিধিটি উত্থাপন করতে পারি।

২. সার্বিকের দৃষ্টান্তীকরণ : সার্বিক-মানক অপনয় বিধি

Universal Instantiation (UI)

যে বাক্য সার্বিকমানকবদ্ধ তার থেকে
এর যে কোনো নিবেশন দৃষ্টান্ত বৈধভাবে নিষ্কাশন করা যায়।

এ বিধিতে যা অনুমোদন করা হল তা এই। মনে কর

ব হল : Ux-বদ্ধ কোনো বাক্য

ভ আর একটি বাক্য। ভ পেলে : ব-এর Ux বর্জন করে, ও এর মুক্ত অংশের প্রত্যেকটি x-এর জায়গায় কোনো একটি নির্বাচিত নাম বসিয়ে।

এখন (উপরোক্ত যুক্তিবিধির বলে) দাবী করতে পার : ব থেকে ভ বৈধভাবে নিষ্কাশিত হয়েছে।

এ বিধির সাহায্যে কি করে ন্যায়ের বৈধতা প্রমাণ করা যায়, তা নিম্নোক্ত উদাহরণটি দেখলে বোঝা যাবে।

U$x(Hx \supset Mx)$	1.	U$x(Hx \supset Mx)$		
Hs	2.	Hs		
∴ Ms	3.	......?	/∴	Ms

এখানে 1 থেকে $Ha \supset Ma$, $Hb \supset Mb$, $Hc \supset Mc$····· এ জাতীয় যে কোনো দৃষ্টান্ত নিষ্কাশন করা যায়। ধর, নিষ্কাশন করা হল : $Ha \supset Ma$। কিন্তু তাহলে এ বাক্য আর প্রদত্ত Hs-এর [2-এর] মধ্যে কোনো যোগসূত্র, মধ্যবাক্য, খুঁজে পাওয়া যাবে না। কিন্তু ইচ্ছা করলে দৃষ্টান্ত হিসাবে আমরা $Hs \supset Ms$-ও নিতে পারি। তাহলে মধ্যবাক্য হিসাবে পাব Hs। মনে রাখবে : UI প্রয়োগ করতে হলে এর গ্রাহক প্রতীক x-এর (বা y ইত্যাদির) জায়গায় এমন নাম বসাতে হবে যার উল্লেখ আছে কোনো ব্যক্তিবিষয়ক হেতুবাক্যে (অবশ্য যদি কোনো হেতুবাক্য ব্যক্তিবিষয়ক হয় তাহলে)। বলা বাহুল্য, উক্ত যুক্তিটির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ এভাবে গঠন করতে হবে।

1.	U$x(Hx \supset Mx)$	
2.	Hs	/∴ Ms
3.	$Hs \supset Ms$	1 UI
4.	Ms	3, 2 MP

আর একটা উদাহরণ।

	All philosophers are wise,		$Ux(Px \supset Wx)$
	all wise men are sceptical,		$Ux(Wx \supset Sx)$
	Socrates is a philosopher,		Ps
∴	Socrates is wise and sceptical.	∴	$Ws \cdot Ss$

এ যুক্তিটির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ দিতে হবে।

প্রমাণ

1.	$Ux(Px \supset Wx)$	
2.	$Ux(Wx \supset Sx)$	
3.	Ps	/∴ $Ws \cdot Ss$
4.	$Ps \supset Ws$	1 UI
5.	Ws	4,3 MP
6.	$Ws \supset Ss$	2 UI
7.	Ss	6,5 MP
8.	$Ws \cdot Ss$	5,7 Adj.

UI প্রয়োগের কী প্রয়োজন এবং কী সুবিধা এ অবরোহটি লক্ষ করলে তা বোঝা যাবে। বাক্যে মানকের উপস্থিতি একটা ঝঞ্ঝাট বা আপদ স্বরূপ। এ যুক্তিবিধি আমাদের সার্বিক মানকের হাত থেকে মুক্তি দেয়। এখন Ux Uy প্রভৃতির বন্ধন থেকে মুক্তি পেলে অনেক সময় কেবল (আমাদের পূর্ব পরিচিত) বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের নিয়ম প্রয়োগ করেই বিধেয় যুক্তির বৈধতার প্রমাণ দেওয়া যায় (যেমন দেওয়া হয়েছে ওপরের উদাহরণটিতে)।

UI বিধি সম্পর্কে আর একটা কথা। এ বিধির ন্যায্যতা সহজবোধ্য। নিশ্চয়ই বুঝেছ যে, এর মূলে আছে এ স্বতসত্য ঃ যা কোনো শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত সকল ব্যক্তি সম্পর্কে সত্য, তা ঐ শ্রেণীর যে কোনো বিশেষ ব্যক্তি, নির্বাচিত ব্যক্তি বা নামিত ব্যক্তি, সম্পর্কেও সত্য। একটা উদাহরণ দিয়ে কথাটা এভাবেও বলা যেত। $Ux(Fx \supset Gx)$-এর বক্তব্য ঃ '$Fx \supset Gx$' is true of everything, every x। সুতরাং এ বাক্যটি যে কোনো ব্যক্তি সম্পর্কে সত্য।

এ যুক্তিবিধির ন্যায্যতা আর একভাবে দেখানো যায়। আমরা জানি, $Ux(-x \supset -x)$ আকারের বাক্যকে (অসীমিত) সংযৌগিক আকারে ব্যক্ত করা যায়। জানি,

$$Ux(Fx \supset Gx) \qquad (1)$$

এ বাক্যের বক্তব্য হল

$$(Fa \cdot Ga) \cdot (Fb \supset Gb) \cdot (Fc \supset Gc) \cdot (Fd \supset Gd) \cdots \qquad (2)$$

এখন Simp-বিধির সাহায্যে* (2) থেকে এর যে কোনো সংযোগী, যেমন $Fa \supset Ga$, $Fb \supset Gb$, ইত্যাদি, নিষ্কাশন করা যায়। সুতরাং এ রকম ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য (1)

---

* এবং Com. আর Assoc.-এর সাহায্য নিয়ে

থেকেই নিষ্কাশন করা যায়। করা যে যায়—তাই অনুমোদন করা হয় UI বিধিতে। বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের Simp আর বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানের UI-এর সাদৃশ্য লক্ষণীয়। আসলে UI বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের Simp-এরই একটা পরোক্ষ রূপ।

UI-এর অপপ্রয়োগ

UI যুক্তিবিধি প্রয়োগ করা খুব সহজ, ঠিক। কিন্তু একটু সতর্ক না হলে এ বিধি প্রয়োগেও ভুল হতে পারে। ভুল হবে যদি এ কথাটা খেয়াল না রাখ :

কোনো বাক্যের ওপর UI প্রয়োগ করা যায়,
যদি—সমগ্র বাক্যটি U*x*-বদ্ধ বাক্য হয় ;
যে U*x*-বদ্ধ বাক্য কোনো যৌগিক বাক্যের
অংশ তার ওপর UI প্রয়োগ করা চলবে না।

UI প্রয়োগ করতে গিয়ে কী রকম ভুল হতে পারে দেখ।

উদাহরণ ১

এমন নয় যে সবাই দার্শনিক $\sim UxPx$
∴ এমন নয় যে সক্রেটিস দার্শনিক ∴ $\sim Ps$

[*x* দার্শনিক=*Px*]

মনে কর, এ যুক্তির অবরোহী "প্রমাণ" দেওয়া হল এভাবে—

1. $\sim UxPx$ /∴ $\sim Ps$
2. $\sim Ps$ 1 UI [অপপ্রয়োগ]

বলা বাহুল্য, এ অবরোহে কোনো ভুল আছে, কেননা এতে একটা অবৈধ* যুক্তিকে বৈধ বলে "প্রমাণ" করা হয়েছে।

ভুলটা হল : 2-এতে UI-এর প্রয়োগ। UI প্রয়োগ করা যায় সার্বিক বাক্যের ওপর। কিন্তু এ অবরোহে 1 সার্বিক বাক্য নয় ; 1 হল নিষেধক বাক্য, সার্বিক বাক্যের নিষেধ। মনে রাখবে

$\sim Ux(\cdots\cdots)$ আকারের বাক্যের ওপর UI প্রয়োগ করা যায় না।

উপরোক্ত ভুলটা এভাবেও ধরিয়ে দেওয়া যায়। 2-এতে যে সার্বিকের [U*xPx*-এর] ওপর UI প্রয়োগ করা হয়েছে তা স্বতন্ত্র বাক্য নয়, অন্য কোনো বাক্যের অংশ। কিন্তু কোনো বাক্যে UI প্রয়োগ করা যায় যদি এমন হয় যে সমগ্র বাক্যটি সার্বিকমানকিত বাক্য।

উদাহরণ ২

If everybody supports then John will win, $UxSx \supset Wj$
∴ if John supports then John will win. ∴ $Sj \supset Wj$

মনে কর, এ যুক্তির বৈধতার "অবরোহী প্রমাণ" গঠন করা হল এভাবে :

1. *$UxSx \supset Wj$ /∴ $Sj \supset Wj$
2. $Sj \supset Wj$ 1 UI [অপপ্রয়োগ]

* অবৈধ, কেননা এর হেতুবাক্য সত্য, সিদ্ধান্ত মিথ্যা।

এ অবরোহেও UI প্রয়োগ করতে গিয়ে ভুল করা হয়েছে। কেননা 2-এতে UI প্রয়োগ করা হয়েছে একটা যৌগিক বাক্যের এক অংশের ওপর। লক্ষণীয়, এখানে 1 সার্বিক মানকিত বাক্য নয়, একটা প্রাকল্পিক বাক্য—যার পূর্বকল্প হল সার্বিক বাক্য।

৩. পরোক্ষ-প্রমাণ পদ্ধতি (Indirect Proof)

আরও অগ্রসর হওয়ার আগে অবরোহ পদ্ধতির একটা বিশেষ রূপের কথা বলতে চাই। বলতে চাই, পরোক্ষ প্রমাণ পদ্ধতির কথা। দেখা যাবে, মুখ্য পদ্ধতি বলতে আমরা বুঝছি—পরোক্ষ পদ্ধতি।

আমরা জানি

> কোনো যুক্তির হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের নিষেধ নিয়ে যদি তার থেকে কোনো স্ববিরোধী বাক্য বৈধভাবে নিষ্কাশন করা যায় তাহলে প্রমাণিত হয় যে যুক্তিটি বৈধ।

এ প্রমাণ পদ্ধতির নাম পরোক্ষ-প্রমাণ পদ্ধতি। আর এ পদ্ধতি প্রয়োগ করলে বলা হয়, IP নিয়ম (Rule of Indirect Proof) প্রয়োগ করা হল।

উদাহরণ হিসাবে এ বাক্য যুক্তিটি নেওয়া যাক।

$$A \supset B, B \supset C, A \therefore C$$

এ যুক্তির বৈধতার পরোক্ষ প্রমাণ দেওয়া যায় এভাবে ঃ

1.	$A \supset B$	
2.	$B \supset C$	
3.	A	$/\therefore C$
4.	$\sim C$	IP (indirect proof)
5.	$\sim B$	2, 4 MT
6.	$\sim A$	1, 5 MT
7.	$A \cdot \sim A$	3, 6 Adj.

বলতে পার ঃ হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের নিষেধ থেকে স্ববিরোধিতা নিষ্কাশন করে মূল যুক্তিটির বৈধতা প্রমাণ করা হল, ঠিক। কিন্তু এ প্রমাণকে অবরোহী প্রমাণ বলব কেন? অবরোহী প্রমাণে ত মূল যুক্তির প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা হয়ে থাকে।

এ আপত্তির উত্তরে বলব—

> যদি আমাদের হাতে স্ববিরোধী বাক্য থাকে—মানে, কোনো বাক্য ও তার নিষেধ অবরোহের কোনো পর্বে পাওয়া যায়, তাহলে ঃ যে কোনো বাক্যই বৈধভাবে নিষ্কাশন করা যায়। সুতরাং প্রদত্ত সিদ্ধান্তও নিষ্কাশন করা যায়।

যথা, উপরোক্ত যুক্তিটির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ দেওয়া যায় এভাবে—

1. $A \supset B$
2. $B \supset C$
3. A $/ \therefore C$
4. $\sim C$ ~Con*
5. $\sim B$ 2, 4 MT
6. $\sim A$ 1, 5 MT
7. $A \vee C$ 3 *Add.*
8. C 7, 6 *DS*

পরোক্ষ প্রমাণে সিদ্ধান্তের নিষেধের দক্ষিণে টিপ্পনী হিসাবে 'IP' না লিখে "~Con" লেখা হল। এখন থেকে 'IP' না লিখে আমরা সব সময় "~Con"ই লিখব। "~Con" থেকে বোঝা যাবে, পরোক্ষ অবরোহী পদ্ধতি গঠন করা হচ্ছে। এবার একটা বিধেয় যুক্তির পরোক্ষ-অবরোহী-প্রমাণ গঠনের চেষ্টা করা যাক।

উদাহরণ হিসাবে নেওয়া যাক এ যুক্তিটি :

$$\text{U}x(Ax \supset Bx),\ \text{U}x(Bx \supset Cx),\ Aa \therefore \exists x(Bx \cdot Cx)$$

প্রমাণ

1. $\text{U}x(Ax \supset Bx)$
2. $\text{U}x(Bx \supset Cx)$
3. Aa $/ \therefore \exists x(Bx \cdot Cx)$
4. $\sim \exists x(Bx \cdot Cx)$ ~Con
5. $\text{U}x \sim (Bx \cdot Cx)$ 4 QE
6. $Aa \supset Ba$ 1 UI
7. $Ba \supset Ca$ 2 UI
8. $\sim (Ba \cdot Ca)$ 5 UI
9. Ba 6, 3 MP
10. Ca 7, 9 MP
11. $\sim Ba \vee \sim Ca$ 8 DM
12. $Ba \supset \sim Ca$ 11 Def $\supset$
13. $\sim Ca$ 12, 9 MP
14. $Ca \vee \exists x(Bx \cdot Cx)$ 10 Add.
15. $\exists x(Bx \cdot Cx)$ 14, 13 DS

UI প্রয়োগের আরও উদাহরণ

উপরোক্ত বিধেয় যুক্তিটির প্রমাণে QE সূত্র প্রয়োগ করা হয়েছে (ঐ প্রমাণের চতুর্থ ছত্র দেখ)। যে যুক্তির সিদ্ধান্ত মানকিত বাক্য তার পরোক্ষ অবরোহী প্রমাণ গঠন

* ~Con = Negation of the Conclusion

করতে হলে এ সূত্রের প্রয়োগ অপরিহার্য। QE সূত্রগুলির মধ্যে আমাদের আপাতত দরকার এ সূত্র দুটি :

$$\text{QE}\quad \frac{\sim \mathrm{U}x\,(\ldots\ldots x\ldots\ldots)}{\exists x \sim(\ldots\ldots x\ldots\ldots)} \qquad\qquad \text{QE}\quad \frac{\sim \exists x\,(\ldots\ldots x\ldots\ldots)}{\mathrm{U}x \sim(\ldots\ldots x\ldots\ldots)}$$

উদাহরণ 1

	Anna is not a student of logic,	$\sim La$
	she is a student of mathematics,	Ma
	all bright students take up logic,	$\mathrm{U}x(Bx \supset Lx)$
∴	it is not true that all students of mathmematics are bright students.	$\therefore \sim \mathrm{U}x(Mx \supset Bx)$

অবরোহ

1.	$\sim La$	
2.	Ma	
3.	$\mathrm{U}x(Bx \supset Lx)$	
4.	$\mathrm{U}x(Mx \supset Bx)$	~Con
5.	$Ma \supset Ba$	4 UI
6.	Ba	5, 2 MP
7.	$Ba \supset La$	3 UI
8.	La	7, 6 MP
9.	$La \vee \sim \mathrm{U}x(Mx \supset Bx)$	8 Add.
10.	$\sim \mathrm{U}x(Mx \supset Bx)$	9, 1 DS

উদাহরণ 2

	All philosophers are wise,	$\mathrm{U}x(Px \supset Wx)$
	Socrates is a Greek philosopher ;	$Gs \cdot Ps$
∴	some Greeks are wise.	$\therefore \exists x(Gx \cdot Wx)$

অবরোহ

1.	$\mathrm{U}x(Px \supset Wx)$	
2.	$Gs \cdot Ps$	
3.	$\sim \exists x(Gx \cdot Wx)$	~Con
4.	$\mathrm{U}x \sim(Gx \cdot Wx)$	3 QE
5.	$Ps \supset Ws$	1 UI
6.	$Ps \cdot Gs$	2 Com.
7.	Ps	6 Simp.

* পরোক্ষ পদ্ধতি প্রয়োগ করলে "/∴" দিয়ে প্রতিজ্ঞা বাক্যটি উল্লেখ না করলেও চলে। ~Con থেকেই বোঝা যাবে কোন্ বাক্যটি নিষ্কাশন করতে যাচ্ছি। বলা বাহুল্য, '~Con'-এর বাম ধারে যে বাক্য তার '~' বাদ দিলে বা তাতে '~' যোগ করলে পাওয়া যাবে নিষ্কাশনীয় বাক্যটি, প্রতিজ্ঞা বাক্যটি।

8.	Ws	5, 7 MP
9.	$\sim(Gs \cdot Ws)$	4 UI
10.	$\sim Gs \vee \sim Ws$	9 DM
11.	$\sim Ws \vee \sim Gs$	10 Com.
12.	$Ws \supset \sim Gs$	11 Def ⊃
13.	$\sim Gs$	12, 8 MP
14.	Gs	2 Simp.
15.	$Gs \vee \exists x(Gx \cdot Wx)$	14 Add.
16.	$\exists x(Gx \cdot Wx)$	15, 13 DS

৪. সাত্তিকের দৃষ্টান্তীকরণ : সাত্তিকমানক অপনয়বিধি

Existential Instantiation (EI)

আমরা দেখেছি, UI দিয়ে Ux-এর বন্ধন থেকে মুক্তি পাওয়া যায়। ফলে কোনো যুক্তিতে Ux-বদ্ধ বাক্য থাকলে আমরা Ux বর্জন করে (এবং কোনো ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য নিষ্কাশন করে) কেবল বাক্য যুক্তির নিয়ম প্রয়োগ করেই অনেক বিধেয় যুক্তির বৈধতার প্রমাণ দিতে পারি। এখন, বিধেয় যুক্তিতে সাত্তিকমানকবদ্ধ বাক্যও ত থাকে। সাত্তিকমানক থেকে মুক্তি পাওয়ার উপায় কী ? বলা বাহুল্য, উপায় হল : UI-এর অনুরূপ একটি বিধি মেনে নেওয়া—যে বিধিকে UI-এর অনুকরণে EI (Existential Instantiation) বলে অভিহিত করা যায়, যে বিধির জোরে $\exists x$-বদ্ধ বাক্য থেকে এর কোনো দৃষ্টান্ত নিষ্কাশন করা যায়। দেখা যাবে, '$\exists x$' বর্জন করতে না পারলে অনেক বিধেয় যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা যায় না। নিচের উদাহরণটি দেখ।

	Whoever is a dictator is a tyrant,	$Ux(Dx \supset Tx)$
	there are dictators ;	$\exists xDx$
∴	there are tyrants.	∴ $\exists xTx$

এ যুক্তির অবরোহী প্রমাণ গঠন করতে গিয়ে এ ছত্রগুলি পেতে পারি :

1.	$Ux(Dx \supset Tx)$	
2.	$\exists xDx$	
3.	$\sim\exists xTx$	~Con
4.	$Ux \sim Tx$	3 QE
5.	$\sim Ta$	4 UI
6.	$Da \supset Ta$	1 UI
7.	$\sim Da$	6, 5 MT

এতদূর এগুনো গেল। কিন্তু তারপর ? আর অগ্রসর হওয়া কি সম্ভব নয় ? সম্ভব হত যদি এমন কোনো বিধি থাকত যা $\exists xDx$-এর, 2-এর, $\exists x$ বর্জন করা ও এর থেকে Da

নিষ্কাশন করা, অনুমোদন করে। তার মানে, যদি আমাদের হাতে EI বলে কোনো বিধি—$\exists x$-বদ্ধ বাক্যের দৃষ্টান্তীকরণের উপায়—থাকত, তাহলে আমরা উক্ত অসম্পূর্ণ অবরোহ এভাবে সম্পূর্ণ করতে পারতাম :

8.	Da	2 EI
9.	$Da \vee \exists xTx$	8 Add
10.	$\exists xTx$	9, 7 DS

বোঝা গেল, বিধেয় যুক্তির অবরোহী প্রমাণের জন্য (UI-এর অনুকরণে) EI বলে একটি যুক্তিবিধি মেনে নেওয়া দরকার। আমরা UI মেনেছি, ঠিক। কিন্তু, মনে হতে পারে EI অনুমোদন করা যায় না। কেন যায় না, দেখ। দাবী করা যায়

$$UxFx \therefore Fa$$

যথা, বলা যায়—সবকিছু নশ্বর (F) ∴ আমার দেহও (a-ও) নশ্বর। কিন্তু এ দাবী সঙ্গতভাবে করা যায় না যে

$\exists xFx \quad \therefore Fa$

যথা

There are fools (F) ∴ Socrates (a) is a fool

সেরকম, দাবী করা যায় না যে

কেউ কেউ মার্কসবাদী (F) ∴ গান্ধী (a) হলেন মার্কসবাদী

সোজা কথায়

All S are P

থেকে (UI প্রয়োগে) বৈধভাবে নিঃসৃত হয় যে

this S is P

কিন্তু

Some S are P

বা At le one S is P

-এর থেকে বৈধভাবে নিঃসৃত হয় না যে

this S is P

আমরা একটা কঠিন সমস্যার সম্মুখীন হলাম : EI হেন কোনো যুক্তিবিধি আমাদের অবশ্যই চাই। অথচ এরূপ যুক্তিবিধি মানা অসঙ্গত বলে মনে হয় (এরূপ বিধি মানলে উক্তরূপ অবৈধ যুক্তিকেও বৈধ বলে মেনে নিতে হবে)। যুক্তিবিজ্ঞানীরা এ সমস্যার সমাধান করেন এভাবে। তারা বলেন : তোমরা যে রকম EI বিধির কথা বলছ সে রকম কোনো অবাধ বিধি অনুমোদন করা যায় না, ঠিক। তবে

$$\frac{\exists x\,(\cdots\cdots x\cdots\cdots)}{(\cdots\cdots a\cdots\cdots)}\ (\text{EI})$$

এরকম বিধিকে বিভিন্ন শর্ত দিয়ে বিশেষিত করে, বিভিন্ন "বারণ"-এর অনুশাসন দিয়ে

সংযত করে, ব্যক্ত করা যায়। এবং এভাবে সংস্কার করে নিলে EI একটি নির্দোষ যুক্তিবিধি বলে গণ্য হবে। যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলেন, EI প্রয়োগ করতে পার : যদি অমুক অমুক "বারণ" মেনে চল, অমুক অমুক নিষিদ্ধ কাজ থেকে বিরত থাক। প্রথমে দেখা যাক, "বারণ" বা "নিষিদ্ধ"গুলি কী কী। তারপর এসব বারণ বা নিষিদ্ধের বেড়ী দিয়ে আষ্টে-পৃষ্ঠে বেঁধে EI বিধিটিকে একটা গ্রহণযোগ্য রূপ দেওয়া যাবে।

"নিষিদ্ধ"গুলি ব্যাখ্যা করা হল কয়েকটি অবরোহী "প্রমাণ"-এর উদাহরণ দিয়ে। উদাহরণ হিসাবে প্রথমে নাও এ যুক্তিটি।

উদাহরণ ১

	Some Indians are philosophers,	$\exists x(Ix \cdot Px)$
∴	Socrates is an Indian philosopher.	∴ $Is \cdot Ps$

এ যুক্তিটি স্পষ্টতই অবৈধ। কিন্তু ধর, কেউ এর অবরোহী "প্রমাণ" উত্থাপন করল এভাবে :

1.	$\exists x(Ix \cdot Px)$	/∴ $Is \cdot Ps$	
2.	$Is \cdot Ps$	1 EI	[অপপ্রয়োগ]

এখানে EI প্রয়োগ (বস্তুত অপপ্রয়োগ) করা হয়েছে বলেই একটা অবৈধ যুক্তি বৈধ বলে "প্রমাণিত" হয়েছে। কাজেই এ জাতীয় "প্রমাণ", মানে EI-এর উক্তরূপ প্রয়োগ, বারণ করা দরকার। এ রকম অপপ্রয়োগ বারণ করা যায় নিম্নোক্ত "নিষিদ্ধ"টি দিয়ে।

নিষিদ্ধ ১ : প্রদত্ত যুক্তির সিদ্ধান্তে যদি কোনো নাম থাকে তাহলে সে নামটি ব্যবহার করে* $\exists x$-বদ্ধ বাক্যের নিবেশন দৃষ্টান্ত গঠন করা চলবে না।

উদাহরণ ২.১

	Something is material,	$\exists xMx$
	God is spiritual ;	Sg
∴	there are things which are both material and spiritual.	∴ $\exists x(Mx \cdot Sx)$

লক্ষণীয়, যুক্তিটি অবৈধ। এর হেতুবাক্য থেকে যা বৈধভাবে নিঃসৃত হতে পারত তা হল : $\exists xMx \cdot \exists xSx$। মনে কর, কেউ উক্ত যুক্তির বৈধতার "প্রমাণ" দিল এভাবে :

1.	$\exists xMx$		
2.	Sg		
3.	$\sim\exists x(Mx \cdot Sx)$	~Con	
4.	Mg	1 EI	[অপপ্রয়োগ]
5.	$Ux\sim(Mx \cdot Sx)$	3 QE	
6.	$\sim(Mg \cdot Sg)$	5 UI	

---

* ঐ যুক্তির অবরোহী প্রমাণে

7.	$\sim Mg \vee \sim Sg$	6 DM
8.	$Mg \supset \sim Sg$	7 Def $\supset$
9.	$\sim Sg$	8, 4 MP
10.	$Sg \vee \exists x(Mx \cdot Sx)$	2 Add.
11.	$\exists x(Mx \cdot Sx)$	10, 9 DS

এ অবরোহে EI অপপ্রযুক্ত হয়েছে চতুর্থ ছত্রে। আমরা দেখাব, এখানে EI-এর অপপ্রয়োগ হয়েছে g নামটি ব্যবহার করা হয়েছে বলে। কিন্তু 4-এতে 'g' ব্যবহার করায় কী দোষ হল ? দেখ, এখানে একটি হেতুবাক্যে (2-এতে) আগেই বলা হয়েছে : g ব্যক্তিতে আছে S ধর্ম। তারপর প্রথম হেতুবাক্যের নিবেশন দৃষ্টান্ত দিয়ে 4-এতে বলা হল : ঐ একই ব্যক্তি g-তে আছে M ধর্মটি। ফলে একই g-তে দুটি বিপরীত ধর্ম আরোপ করা হল। বলা বাহুল্য, এটা অসঙ্গত। একই ব্যক্তির বেলায় তুমি একবার বলবে : এতে ধ ধর্মটি আছে, আবার বলবে : ঐ বস্তুতে ধ-এর বিরুদ্ধ বা বিপরীত ধর্ম আছে—এটা অনুমোদন করা যায় না। কাজেই EI-এর উক্তরূপ প্রয়োগ নিষিদ্ধ করে দেওয়া দরকার। এ উদ্দেশ্যে উল্লেখ করা হল নিম্নোক্ত নিষিদ্ধটি :

নিষিদ্ধ ২.১ : প্রদত্ত যুক্তির হেতুবাক্যে যদি কোনো নাম থাকে তাহলে সে নামটি ব্যবহার করে* $\exists x$-বদ্ধ বাক্যের নিবেশন দৃষ্টান্ত গঠন করা চলবে না।

উদাহরণ ২.২

Some politicians are not honest,	$\exists x(Px \cdot \sim Hx)$
∴ it is false that some politicians are honest.	∴ $\sim \exists x(Px \cdot Hx)$

এ যুক্তিটি অবৈধ।** মনে কর, এ যুক্তির বৈধতার "প্রমাণ" দেওয়া হল এভাবে :

1.	$\exists x(Px \cdot \sim Hx)$	
2.	$\exists x(Px \cdot Hx)$	~Con
3.	$Pa \cdot \sim Ha$	1 EI
4.	$Pa \cdot Ha$	2 EI [অপপ্রয়োগ]
5.	$Ha \cdot Pa$	4 Com.
6.	Ha	5 Simp.
7.	$\sim Ha \cdot Pa$	3 Com.
8.	$\sim Ha$	7 Simp.
9.	$Ha \vee \sim \exists x(Px \cdot Hx)$	6 Add.
10.	$\sim \exists x(Px \cdot Ax)$	9, 8 DS

---

* পৃঃ ৭৩-এর পাদটীকা দেখ।

** এর অবৈধতা স্পষ্ট হবে যদি লক্ষ কর যে, যুক্তিটিতে আসলে বলা হয়েছে—

Some politicians are not honest,
∴ no politicians are honest,

এখানে চতুর্থ ছত্রে EI প্রয়োগ করতে গিয়ে ভুল করা হয়েছে। দেখ, প্রথম হেতুবাক্যের দৃষ্টান্তীকরণ করা হয়েছে (তৃতীয় ছত্রে) a নামটি দিয়ে। চতুর্থ ছত্রে দ্বিতীয় হেতুবাক্যের দৃষ্টান্তীকরণ করতে গিয়ে ঐ একই নাম ব্যবহার করা হয়েছে। তার ফল হল এই : 3-এতে বলা হয়েছে—a নামক ব্যক্তিতে H ধর্মটি নেই ('$\sim Ha$' লক্ষণীয়), কিন্তু 4-এতে বলা হল—ঐ একই ব্যক্তি a-তে H ধর্মটি আছে ('Ha' লক্ষণীয়)। যে হেতু ২.১-এতে EI প্রয়োগ অসঙ্গত, ঠিক সে হেতুতেই উপরোক্ত যুক্তির 4-এতে EI প্রয়োগ অসঙ্গত।

আরও একটা উদাহরণ।

	Some students are girls,		$\exists x(Sx \cdot Gx)$
	some students are boys,		$\exists x(Sx \cdot Bx)$
∴	some boys are girls.	∴	$\exists x(Bx \cdot Gx)$

এর বৈধতার "প্রমাণ" :

1.	$\exists x(Sx \cdot Gx)$	
2.	$\exists x(Sx \cdot Gx)$	
3.	$\sim\exists x(Bx \cdot Gx)$	$\sim$Con
4.	$Sa \cdot Ga$	1 EI
5.	$Sa \cdot Ba$	2 EI [অপপ্রয়োগ]

এ "প্রমাণ"-এর 5-এতে EI অপপ্রয়োগ করা হয়েছে। চতুর্থ ছত্রে বলা হয়েছে : a নামক ব্যক্তিটি মেয়ে (Ga), আর পঞ্চম ছত্রে বলা হল : ঐ একই ব্যক্তি a হল ছেলে (Ba)। EI-এর উক্তরূপ অপপ্রয়োগ নিষিদ্ধ করার উদ্দেশ্যে উল্লেখ করা হল নিম্নোক্ত "নিষিদ্ধ"টি।

নিষিদ্ধ ২.২ : যে নাম দিয়ে কোনো অবরোহে $\exists x$-বদ্ধ বাক্যের নিবেশন দৃষ্টান্ত গঠন করা হয়, সে নাম দিয়ে ঐ অবরোহে আর $\exists x$-বদ্ধ বাক্যের নিবেশন দৃষ্টান্ত গঠন করা চলবে না।*

২.১–২.২-এতে দুষ্ট অবরোহের যে উদাহরণগুলি দেওয়া হয়েছে সেগুলির প্রত্যেকটির দোষ হল এই : পূর্ববর্তী ছত্রে যে নাম আছে সে নাম দিয়ে পরবর্তী কোনো ছত্রে $\exists x$-বদ্ধ বাক্যের দৃষ্টান্ত দেওয়া হয়েছে। কাজেই নিষিদ্ধ ২.১ আর নিষিদ্ধ ২.২-কে যুক্ত করে এ নিষিদ্ধটি পেতে পারি :

নিষিদ্ধ ২ : যদি অবরোহের কোনো ছত্রে কোনো নাম থাকে তাহলে পরবর্তী কোনো ছত্রে সে নাম ব্যবহার করে $\exists x$-বদ্ধ বাক্যের দৃষ্টান্ত দেওয়া চলবে না।

* অন্য কোনো নাম দিয়ে নিবেশন দৃষ্টান্ত গঠন করতে পার। তবে সে ক্ষেত্রে মধ্যবাক্য খুঁজে পাবে না, ফলে অবৈধ যুক্তির বৈধতাও "প্রমাণ" করতে পারবে না।

এখন নিষিদ্ধ ১ আর নিষিদ্ধ ২ যুক্ত করে EI বিধিটি নিম্নোক্তরূপে ব্যক্ত করতে পারি।

EI (Existential Instantiation)

> যে বাক্য সাত্তিকমানকবদ্ধ তার থেকে এর কোনো নিবেশন দৃষ্টান্ত বৈধভাবে নিষ্কাশন করা যায়, কেবল যদি এমন হয় যে : যে নামটি নিবেশন দৃষ্টান্তে ব্যবহার করা হল
>
> (ক) সে নামটি প্রদত্ত যুক্তির সিদ্ধান্তে নেই, এবং
>
> (খ) যে ছত্রে নামটি দৃষ্টান্তীকরণের জন্য উত্থাপন করা হল তার পূর্ববর্তী কোনো ছত্রে নামটি নেই।

৫. EI-এর নিষিদ্ধ সম্পর্কে আরও দু একটা কথা

EI-এর অপপ্রয়োগ দেখাতে গিয়ে আমরা এমন বিধেয় নিয়েছি যেগুলি একই ব্যক্তি সম্পর্কে প্রয়োগ করা যায় না—যেগুলি বিসংবাদী, যেমন আমাদের উদাহরণের $S, M, H, \overline{H}, B, G$* । আর একটা উদাহরণ।

	Something is round,	$\exists xRx$
	something is square ;	$\exists xSx$
∴	something is both round and square.	∴ $\exists x(Rx \cdot Sx)$

এ যুক্তির প্রথম হেতুবাক্যের দৃষ্টান্তীকরণের জন্য যদি '*a*' ব্যবহার করি তাহলে—দ্বিতীয় হেতুবাক্যের দৃষ্টান্তীকরণের জন্য '*a*' ব্যবহার করা যাবে না। যদি ব্যবহার করা হত তাহলে বলা হত : একই বস্তু *a* যুগপৎ গোল ও চৌকো। নিষিদ্ধ ২-এর সমর্থনে আমরা যে যুক্তি উত্থাপন করেছি তা ছিল এই :

> যদি '*a*' দিয়ে কোনো সাত্তিকমানাংকিত বাক্যের, $\exists xFx$-এর, দৃষ্টান্তীকরণ করি তাহলে সে '*a*' দিয়ে আর কোনো দ্বিতীয় সাত্তিক হেতুবাক্যের, $\exists xGx$-এর, দৃষ্টান্তীকরণ করা যাবে না—কেননা, তাহলে একই ব্যক্তিতে, *a*-তে, বিসংবাদী ধর্ম আরোপ করা হবে।

কাজেই নিম্নোক্ত অবরোহটি ভ্রান্ত :

1.	$\exists xRx$	
2.	$\exists xSx$	/∴ $\exists x(Rx \cdot Sx)$
3.	Ra	1 EI
4.	Sa	2 EI [অপপ্রয়োগ]
	....	

---

* স্মরণীয়—
S—is spiritual, *M*—is material, *H*—is honest, *B*—is a boy, *G*—is a girl

কিন্তু এমন ত হতে পারে যে, a-তে প্রযুক্ত ধর্মগুলি বিসংবাদী নয়, $\exists xFx$ আর $\exists xGx$-এর F আর G বিসংবাদী ধর্ম নয়। উদাহরণ :

	Somebody is tall,		$\exists xTx$
	somebody is fair ;		$\exists xFx$
∴	somebody is tall and fair.	∴	$\exists x(Tx \cdot Fx)$

এখানে T আর F বিসংবাদী নয়। তাহলে আলোচ্য নিষিদ্ধটি এ রকম যুক্তির বেলায় খাটবে কেন ?

উত্তর :

যুক্তিবিজ্ঞানে আমাদের দৃষ্টিভঙ্গি আকারসর্বস্ব। কাজেই কোনো দুটি বিধেয় বস্তুত বিসংবাদী কিনা তা, যুক্তিবিজ্ঞানের ছাত্র হিসাবে, আমাদের জানার কথা নয়, বা জানার দরকার নেই। কিন্তু এটা আমরা জানি যে, প্রাসঙ্গিক বিধেয়গুলি বিসংবাদী হতে পারে। বিধেয়গুলি যে বিসংবাদী নয়—তার নিশ্চয়তা কোথায় ?

এ উত্তরটা এ ভাবেও দেওয়া যেত। উক্ত যুক্তিটি যে আকারের তার বিরুদ্ধ দৃষ্টান্ত আমরা পেয়েছি (পূর্ববর্তী যুক্তিটি, $\exists xRx$, $\exists xSx \cdots$)। সুতরাং এ আকারের সব যুক্তি অবৈধ। আরও বিশদভাবে বলতে গেলে, পূর্ববর্তী অবরোহটি দুষ্ট, সুতরাং

1. $\exists xTx$
2. $\exists xFx$ $\quad / \therefore \ \exists x(Tx \cdot Fx)$
3. Ta
4. Fa

....

এ অবরোহটিও দুষ্ট।

EI সংক্রান্ত নিষিদ্ধটির কী প্রয়োজন তা এভাবেও ব্যাখ্যা করা যেত।

(1) $\exists xFx$
(2) $\exists xGx$
(3) Fa $\quad$ (1) EI

....

(1)-এর বক্তব্য : কোনো বস্তু হল F, (2)-এর বক্তব্য হল : কোনো বস্তু হল G। এখন, এ বস্তু দুটি যে অভিন্ন বস্তু, যেমন a, হবে তার নিশ্চয়তা কোথায় ? যে ব্যক্তিটি লম্বা, সে ব্যক্তিটিই যে ফর্সা হবে এমন কথা নেই। যে বস্তুটি F এবং যে বস্তুটি G—সে বস্তু দুটি যে অভিন্ন, এ কথা কোনো হেতুবাক্যে বলা হয় নি। কাজেই যদি মনে করি, যে বস্তুটি F সেটি হল a, তাহলে আর এ কথা বলা যাবে না—ঐ একই a হল G। এ কথার অর্থ : যদি 'a' দিয়ে কোনো সাত্তিকমানকিত বাক্যের, $\exists xFx$-এর, দৃষ্টান্তীকরণ করি তাহলে ঐ 'a' দিয়ে অন্য সাত্তিকমানকিত বাক্যের, $\exists xGx$-এর, দৃষ্টান্তীকরণ করা চলবে না।

প্রসঙ্গত, মনে রাখবে

$$\exists xFx \cdot \exists xGx \text{ অসম } \exists x(Fx \cdot Gx)$$

কেননা, এ কথা ঠিক যে

$\exists x(Fx \cdot Gx)$ প্রতিপাদন করে $\exists xFx \cdot \exists xGx$-কে

কিন্তু, আমরা দেখলাম যে

$\exists xFx \cdot \exists xGx$ প্রতিপাদন করে না $\exists x(Fx \cdot Gx)$-কে।

৬. EI প্রয়োগে কৌশল

বিভাগ ৪-এর সুরুতে এ যুক্তিটি উল্লেখ করেছিলাম :

Whoever is a dictator.........	$Ux(Dx \supset Tx)$
...............(পৃঃ দ্রষ্টব্য)	$\exists xDx$
	$\therefore \exists xDx$

এবং বলেছিলাম আমাদের হাতে EI যুক্তিবিধি থাকলে এ যুক্তির বৈধতা এভাবে প্রমাণ করা যেত :

1.	$Ux(Dx \supset Tx)$	
2.	$\exists xDx$	$\therefore$
3.	$\sim\exists xTx$	$\sim$Con
4.	$Ux\sim Tx$	3 QE
5.	$\sim Ta$	4 UI
6.	$Da \supset Ta$	1 UI
7.	$\sim Da$	6,5 MT
8.	Da	2 EI
9.	$Da \vee \exists xTx$	8 Add.
10.	$\exists x\ Tx$	9,7 DS

উপরোক্ত যুক্তিটি বৈধ। কিন্তু অবরোহটি কি নির্দোষ ?

উত্তর : (এখন বলতে পারি) না, এ অবরোহের ৮ম ছত্র আপত্তিকর। কেননা : এ ছত্রে EI প্রয়োগ করতে গিয়ে *a* নামটি ব্যবহার করা হয়েছে। *a* নামটি কিন্তু পূর্ববর্তী ছত্রেও আছে। এবং আমরা জানি, EI প্রয়োগ করতে হয় কোনো নতুন নাম (পূর্ববর্তী-কোনো-ছত্রে-নেই-এমন নাম) দিয়ে ॥ তবে এ রকম ভুল হল কৌশলগত ভুল। একটু কৌশল করলেই এ ভুল এড়ানো যায়। UI প্রয়োগ করতে গিয়ে *a* ব্যবহার করা হয়েছে। UI-এর আগেই যদি *a* দিয়ে EI প্রয়োগ করা হয় তাহলে আর উক্ত আপত্তি উঠতে পারে না।* আলোচ্য অবরোহের ছত্রগুলি একটু অদল বদল করে, UI-এর আগেই EI প্রয়োগ করে, অবরোহটি এভাবে সাজানো যায় :

* UI প্রয়োগের বেলায় যে-কোনো নাম ব্যবহার করা যায়—সে নামটি আগে ব্যবহার করা হয়ে থাক বা না থাক।

1. $\mathrm{U}x(Dx \supset Tx)$
2. $\exists xDx$
3. $\sim\exists xTx$ ~Con
4. $\mathrm{U}x\sim Tx$ 3 QE
5. Da 2 EI
6. $Da \supset Ta$ 1 UI
7. $\sim Ta$ 4 UI
8. $\sim Da$ 6,7 MT
9. $Da \vee \exists xTx$ 5 Add.
10. $\exists xTx$ 9,8 DS

এ অবরোহটি নির্ভুল (এতে EI-এর কোনো "নিষিদ্ধ" লঙ্ঘন করা হয় নি)।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে একটা শিক্ষা—প্রয়োগ কৌশল, সংক্ষেপে কৌশল, সংক্রান্ত একটা নিয়ম, পেলাম।

কৌশল সংক্রান্ত নিয়ম

একই অবরোহে UI ও EI প্রয়োগ করতে হলে,
প্রথমে EI, তারপর UI প্রয়োগ করতে হবে।

EI সম্পর্কে যে "নিষিদ্ধ"গুলির কথা বলা হয়েছে তার থেকে বোঝা গেছে

একই অবরোহে একই নাম দিয়ে একাধিক বার
EI প্রয়োগ করা চলবে না।

কিন্তু বস্তুত এমন বৈধ যুক্তির সাক্ষাৎ পেতে পার যাতে আছে একাধিক আংশিক বাক্য, $\exists x(\cdots\cdots)$ আকারের বাক্য। এরকম ক্ষেত্রে দেখবে, কেবল একটি আংশিক বাক্যের ওপর EI প্রয়োগ করে বৈধতা প্রমাণ করা যায়। তোমার সুবিধামত, যুক্তিটির অন্তর্ভুক্ত যে কোনো আংশিক বাক্য তুমি EI প্রয়োগের জন্য বেছে নিতে পার। কিন্তু কেবল একটির ওপরই, মানে অবরোহটিতে একবারই, EI প্রয়োগ করবে।

উদাহরণ

$$\mathrm{U}x(Ux \supset Mx),\ \mathrm{U}x(Cx \supset Mx),\ \mathrm{U}x(Hx \supset Px)$$
$$\exists x(Cx \cdot \sim Px),\ \exists x(Ux \cdot Hx)\ \therefore\ \exists x(Mx \cdot Px)$$

অবরোহ

1. $\mathrm{U}x(Ux \supset Mx)$
2. $\mathrm{U}x(Cx \supset Mx)$
3. $\mathrm{U}x(Hx \supset Px)$
4. $\exists x(Cx \cdot \sim Px)$
5. $\exists x(Ux \cdot Hx)$
6. $\sim\exists x(Mx \cdot Px)$ ~Con
7. $\mathrm{U}x\sim(Mx \cdot Px)$ 6 QE

আর এগুতে হলে EI প্রয়োগ করতে হবে। কিন্তু কার ওপর? 4-এর ওপর নাকি 5-এর ওপর? প্রথমে 1—5-এর বিধেয়গুলির ওপর চোখ বুলিয়ে নাও। 5-এর U আর 1-এর U-এর ওপর নজর পড়লে বুঝতে পারবে, 1 আর 5 থেকে পাওয়া যাবে M। আবার 5-র H আর 3-এর H-এর ওপর যদি চোখ পড়ে থাকে, তাহলে নিশ্চয়ই বুঝেছ যে 3 আর 5 থেকে পাওয়া যাবে P। তাহলে ত সিদ্ধান্ত পেয়েই গেলাম। কাজেই সাব্যস্ত করলাম যে 5-এর ওপরই EI প্রয়োগ করব।

8.	$Ua \cdot Ha$	5 EI
9.	Ua	8 Simp.
10.	$Ha \cdot Ua$	8 Com.
11.	Ha	10 Simp.
12.	$Ua \supset Ma$	1 UI
13.	Ma	12,9 MP
14.	$Ha \supset Pa$	3 UI
15.	Pa	14,11 MP
16.	$\sim(Ma \cdot \sim Pa)$	7 UI
17.	$\sim Ma \vee \sim Pa$	16 DM
18.	$Ma \supset \sim Pa$	17 Def $\supset$
19.	$\sim Pa$	18,13 MP
20.	$Pa \vee \exists x(Mx \cdot Px)$	15 Add.
21.	$\exists x(Mx \cdot Px)$	20,19 DS

লক্ষণীয় এ অবরোহে কেবল 4-ই যে অকেজো হয়ে থাকল তা নয়, 2-ও কোনো কাজে এল না।

EI প্রসঙ্গে অনেক "নিষিদ্ধ" উল্লেখ করা হল। একটা নিষিদ্ধ স্বতঃবোধ্য বলে ধরে নেওয়া হয়েছে, এর কথা স্পষ্ট করে বলা হয় নি। এখন মনে হচ্ছে, কথাটা স্পষ্ট করে বলা ভাল। UI প্রসঙ্গে বলেছি, এ দৃষ্টান্তীকরণবিধি প্রয়োগ করা যায় কেবল Ux-বদ্ধ বাক্যের ওপর। EI সম্পর্কেও এ কথা খাটে।

> EI প্রয়োগ করা যাবে কেবল সমগ্র $\exists x$-বদ্ধ বাক্যের ওপর। $\exists x(\cdots\cdots)$ যদি কোনো বাক্যের অংশ হয় তাহলে সে বাক্যের, $\exists x$-বদ্ধ অঙ্গবাক্যের ওপর EI বিধি প্রয়োগ করা চলবে না।

যেমন, $\sim\exists xFx$, $Fa \supset \exists xFx$, $\exists xFx \vee \exists xGx$—এ সবের ওপর EI বিধি প্রয়োগ করা যাবে না।

EI প্রয়োগের আরও উদাহরণ

উদাহরণ ১

$\exists x(Ax \cdot \sim Bx)$

$Ux\{[Ax \cdot \sim(Cx \vee Dx)] \supset Bx\}$

$\therefore\ \exists x[Cx \vee (Dx \cdot Ax)]$

অবরোহ

1.	$\exists x(Ax \cdot \sim Bx)$	
2.	$Ux\{[Ax \cdot \sim(Cx \vee Dx)] \supset Bx\}$	
3.	$\sim\exists x[Cx \vee (Dx \cdot Ax)]$	~Con
4.	$Ux\sim[Cx \vee (Dx \cdot Ax)]$	3 QE
5.	$Aa \cdot \sim Ba$	1 EI
6.	Aa	5 Simp.
7.	$\sim Ba \cdot Aa$	5 Com.
8.	$\sim Ba$	7 Simp.
9.	$\sim[Ca \vee (Da \cdot Aa)]$	4 UI
10.	$\sim Ca \cdot \sim(Da \cdot Aa)$	9 DM
11.	$\sim Ca$	10 Simp.
12.	10 Com.	
13.	$\sim(Da \cdot Aa)$	12 Simp.
14.	$\sim Da \vee \sim Aa$	
15.	$Da \supset \sim Aa$	
16.	$\sim Da$	15, 6 DN, MT
17.	$[Aa \cdot \sim(Ca \vee Da)] \supset Ba$	2 UI
18.	$\sim Ca \cdot \sim Da$	11, 16 Adj.
19.	$\sim(Ca \vee Da)$	18 DM
20.	$Aa \cdot \sim(Ca \vee Da)$	6, 19 Adj.
21.	Ba	17, 20 MP
22.	$Ba \vee \exists x[Cx \vee (Dx \cdot Ax)]$	21 Add.
23.	$\exists x[Cx \vee (Dx \cdot Ax)]$	22, 8 DS

উদাহরণ ২

$\exists x[Ax \cdot \sim(Bx \vee Cx)]$

$Ux[(Ax \cdot Dx) \equiv \sim Bx]$

$\therefore\ \exists x[Ax \cdot \sim(Dx \cdot Ex)]$

অবরোহ

1.	$\exists x[Ax \cdot \sim(\sim Bx \vee Cx)]$	
2.	$Ux[(Ax \cdot Dx) \equiv \sim Bx]$	
3.	$\sim\exists x[Ax \cdot \sim(Dx \cdot Ex)]$	~Con
4.	$Ux\sim[Ax \cdot \sim(Dx \cdot Ex)]$	
5.	$Aa \cdot \sim(\sim Ba \vee Ca)$	1 EI
6.	Aa	
7.	5 Com.	
8.	$\sim(\sim Ba \vee Ca)$	

9.	$Ba \cdot \sim Ca$	
10.	Ba	
11.	$\sim Ca \cdot Ba$	
12.	$\sim Ca$	
13.	$\sim[Aa \cdot \sim(Da \cdot Ea)]$	4 UI
14.	$\sim Aa \vee (Da \cdot Ea)$	
15.	$Aa \supset (Da \cdot Ea)$	
16.	$Da \cdot Ea$	15, 6 MP
17.	Da	
18.	$Ea \cdot Da$	
19.	Ea	
20.	$(Aa \cdot Da) \equiv \sim Ba$	2 UI
21.	$[(Aa \cdot Da) \supset \sim Ba] \cdot [\sim Ba \supset (Aa \cdot Da)]$	
22.	$(Aa \cdot Da) \supset \sim Ba$	
23.	$Aa \cdot Da$	6, 17 Adj.
24.	$\sim Ba$	22, 23 MP
25.	$Ba \vee \exists x[Ax \cdot \sim(Dx \cdot Ex)]$	10 Add.
26.	$\exists x[Ax \cdot \sim(Dx \cdot Ex)]$	25, 24 DS

৭. মুখ্য পদ্ধতি : IP ও CP

আমরা দেখেছি, যে পদ্ধতি এ অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হল (যার নাম দিয়েছি মুখ্য পদ্ধতি) সেটা পরোক্ষ পদ্ধতি। ফলে এতে ~Con-এর ব্যবহার অপরিহার্য। কিন্তু আমরা জানি IP-কে CP-এরই বিশেষ রূপ বলে গণ্য করা যায়। কাজেই আলোচ্য পদ্ধতিতে CP বা প্রাকল্পিক পদ্ধতির রূপও দেওয়া যায়। আমরা জানি, CP বিধি অনুসারে

> কোনো যুক্তির প্রদত্ত হেতুবাক্যের, ব-এর, সঙ্গে কোনো বাক্য ক যুক্ত করে যদি ভ বৈধভাবে নিষ্কাশন করা যায়, তাহলে এ নিষ্কাশনের জোরে দাবী করা যায়—ঐ প্রদত্ত হেতুবাক্য ব থেকেই ক ⊃ ভ বৈধভাবে নিঃসৃত হয়।

উদাহরণ

[ব]	1.	$A \supset B$		
	2.	$B \supset C$		
	3.	A	$/\therefore C$	
[ক]	4.	$\sim C$		
	5.	$\sim B$	2,4 MT	
	6.	$\sim A$	1,5 MT	
[ভ]	7.	$A \cdot \sim A$	3,6 Adj.	

এখন এ দাবী করতে পারি ব (প্রদত্ত হেতুবাক্য) থেকে নিঃসৃত হয় ক $\supset$ ভ, এক্ষেত্রে— $\sim C \supset (A \cdot \sim A)$। কাজেই উক্ত অবরোহে এ ছত্রটা যোগ করতে পারি—

$$8. \quad \sim C \supset (A \cdot \sim A) \qquad 4 \rightarrow 7 \text{ CP}$$

ক-এর ($\sim C$-এর) পূর্বকল্পীকরণ (conditionalization) যে করা হয়েছে, মানে অতিরিক্ত হেতুবাক্য-হিসাবে-নেওয়া ক-কে ($\sim C$-কে) নিষ্কাশিত ভ-এর ($A \cdot \sim A$-এর) সঙ্গে পূর্বকল্প হিসাবে যুক্ত করে প্রাকল্পিক ক $\supset$ ভ যে বস্তুত গঠন করা হয়েছে, তা বক্র তীর দিয়ে দেখানোর রীতির সঙ্গে আমাদের পরিচয় থাকার কথা। আমরা এ রীতি অনুসরণ করব। কাজেই উক্ত অবরোহটি এভাবে বিন্যস্ত করতে হবে :

1. $A \supset B$
2. $B \supset C$
3. A
→4. $\sim C$
5. $\sim B$
6. $\sim A$
7. $A \cdot \sim A$

---

8. $\sim C \supset (A \cdot \sim A)$

এখন অসম্ভবতার নিয়ম (Law of Absurdity) প্রয়োগ করে সহজেই প্রদত্ত সিদ্ধান্ত C নিষ্কাশন করা যায়। নিয়মটা মনে আছে ত ? নিয়মটার বক্তব্য হল : যে প্রাকল্পিকের অনুকল্প স্ববিরোধী সে প্রাকল্পিক সত্য হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে এর পূর্বকল্পটি মিথ্যা।

সংকেতলিপিতে—

Law of Absurdity (Absur.)

$$\frac{p \supset (q \cdot \sim q)}{\sim p}$$

কাজেই উক্ত অবরোহের সর্বশেষ পর্ব হিসাবে লিখতে পারি

$$9. \quad C \qquad 8 \text{ Absur., DN}$$

এবার উদাহরণ হিসাবে নাও এ বিধের যুক্তিটা :

$$\text{U}x(Ax \supset Bx), \text{U}x(Bx \supset Cx), Aa \quad \therefore \quad Ca$$

অবরোহ

1. $\text{U}x(Ax \supset Bx)$
2. $\text{U}x(Bx \supset Cx)$
3. Aa

→4.	$\sim Ca$	
5.	$Ba \supset Ca$	2 UI
6.	$\sim Ba$	
7.	$Aa \supset Ba$	1 UI
8.	$\sim Aa$	
9.	$Aa \cdot \sim Aa$	3,8 Adj.
10.	$\sim Ca \supset (Aa \cdot \sim Aa)$	4→9 CP
11.	Ca	10 Absur, DN

এভাবে প্রাকল্পিক পদ্ধতিতে যদি অবরোহ বিন্যস্ত করা হয় তাহলে পূর্ববর্তী বিভাগের উদাহরণ ১ ধারণ করবে এ আকার।

1.	$\exists x(Ax \cdot \sim Bx)$	
2.	$Ux\{[Ax \cdot \sim(Cx \vee Dx)] \supset Bx\}$	
→3.	$\sim \exists x[Cx \vee (Dx \cdot Ax)]$	
	....	
8.	$\sim Ba$	
	....	
21.	Ba	
22.	$Ba \cdot \sim Ba$	
23.	$\sim \exists x[Cx \vee (Dx \cdot Ax)] \supset (Ba \cdot \sim Ba)$	3 → 22 CP
24.	$\exists x[Cx \vee (Dx \cdot Ax)]$	

মুখ্য পদ্ধতিতে IP কি CP যে রূপই দাও না কেন, এর আসল কথাটা হল ঃ ~Con নিয়ে দুটি বিরুদ্ধ বাক্য নিষ্কাশন করা। আগেকার প্রমাণগুলিতে আমরা ব, ~ব আকারের বাক্য থেকে Add, DS-এর সাহায্যে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করেছি। প্রাকল্পিক প্রমাণের (CP-এর) আকারে অবরোহ বিন্যস্ত করলে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশনের জন্য দরকার Absur.-এর প্রয়োগ। তোমরা যেভাবেই প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন কর না কেন, আবার বলি, মুখ্য পদ্ধতির আসল কথাটা হল ঃ ~Con নিয়ে, UI, EI প্রয়োগ করে দৃষ্টান্তীকরণ ও স্ববিরোধিতা নিষ্কাশন। কাজেই ইচ্ছা করলে অবরোহের ব · ~ব পর্বেই থামতে পার।

এর পরে মুখ্য পদ্ধতি প্রয়োগ করলে আমরা ব · ~ব পর্বেই থামব।

অনুশীলনী

১. নিম্নোক্ত অবরোহগুলির শূন্যস্থান পূর্ণ কর।

১

1.	$\exists x(Ax \cdot Bx)$	
2.	$Ux(Ax \supset \sim Bx)$	~Con
3.		1 EI

4.		2 UI
5.	*Aa*	
6.		4,5 M*P*
7.	*Ba* · *Aa*	
8.		
9.	*Ba* · ∼*Ba*	

২

1.	∃x(*Cx* · ∼*Dx*)	
2.	Ux(*Ex* ⊃ *Dx*)	
3.		∼Con
4.	*Ca* · ∼*Da*	
5.		2 UI
6.		3 UI
7.	*Ca*	
8.		6,7 MP
9.	*D a*	—,—MP
10.		4 Com.
11.		10 Simp.
12.	*Da* v ∼Ux(*Cx* ⊃ *Ex*)	
13.	∼Ux(*Cx* ⊃ *Ex*)	

৩

1.	∼Ux(*Fx* ⊃ *Gx*)	
2.		∼Con
3.		1 QE
4.		2 QE
5.	∼(*Fa* ⊃ *Ga*)	
6.		4 UI
7.	∼*Fa* v ∼∼*Ga*	
8.		
9.	*Fa* ⊃ *Ga*	
10.		9 Add.
11.	∃x(*Fx* · ∼*Gx*)	10,5 DS

৪

1.	Ux(*Ix* ⊃ ∼*Kx*)	
2.	Ux(*Jx* ⊃ *Kx*)	
3.		∼Con
4.	∃x∼ (*Ix* ⊃ ∼*Jx*)	
5.		4 EI
6.	*Ia* ⊃ ∼*Ka*	

7.   2 UI
8. $\sim Ka \supset \sim Ja$
9.   6,8 HS
10.   5,9 Adj.
11.   3←10 CP
12. $Ux(Ix \supset \sim Jx)$

৫

1. $Ux(Kx \supset \sim Mx)$
2. $Ux(Lx \supset Mx)$
3. $\sim Ux\ Kx \supset \sim Lx)$ ~Con
4.   3 QE
5. $\sim(Ka \supset \sim La)$
6.   1 UI
7.   2 UI
8.   7 Trans.
9.   6,8 HS
10.   9,5 Adj.
11.   3→10 CP
12.   11 Absur.

৬

1. $\exists x(Mx \cdot \sim Ox)$
2. $Ux(Mx \supset Nx)$
3. $\sim \exists x(Nx \cdot \sim Ox)$ ~Con
4. $Ux\sim(Nx \cdot \sim Ox)$
5.   1 EI
6.   2 UI
7. $\sim(Na \cdot \sim Oa)$
8.
9. Na
10.   5 Com.
11. $\sim Oa$
12.
13.   12, 7 Adj.
14. $\sim \exists x(Nx \cdot \sim Ox \supset [(Na \cdot \sim Oa) \cdot \sim(Na \cdot \sim Oa)]$ 3→12 CP
15.   13 Absur.

২. **Justify the unjustified lines in each of the following :**

I

1. $Ux(Ax \supset Bx)$ Premiss
2. $Ux(Bx \supset \sim Cx)$ Premiss

3. $\sim Ux(Ax \supset \sim Cx)$
4. $\exists x \sim (Ax \supset \sim Cx)$
5. $\sim (Aa \supset \sim Ca)$
6. $Aa \supset Ba$
7. $Ba \supset \sim Ca$
8. $Aa \supset \sim Ca$
9. $(Aa \supset \sim Ca) \cdot \sim (Aa \supset \sim Ca)$
10. $\sim Ux(Ax \supset \sim Cx) \supset [(Aa \supset \sim Ca) \cdot \sim (Aa \supset \sim Ca)]$
11. $Ux(Ax \supset \sim Cx)$

II

1. $Da \supset Eb$ Premiss
2. $\sim Da \supset Ea$ Premiss
3. $\sim \exists x Ex$
4. $Ux \sim Ex$
5. $\sim Eb$
6. $\sim Da$
7. Ea
8. $\sim Ea$
9. $Ea \cdot \sim Ea$
10. $\sim \exists x Ex \supset (Ea \cdot \sim Ea)$
11. $\exists x Ex$

III

1. $Ux(Fx \supset \sim Hx)$ Premiss
2. $\sim Ux[(Fx \cdot Gx) \supset \sim Hx]$ ~Con
3. $\exists x \sim [(Fx \cdot Gx) \supset \sim Hx]$
4. $\sim [(Fa \cdot Ga) \supset \sim Ha]$
5. $Fa \supset \sim Ha$
6. $\sim [\sim (Fa \cdot Ga) \vee \sim Ha]$
7. $(Fa \cdot Ga) \cdot Ha$
8. $Fa \cdot (Ga \cdot Ha)$
9. $Fa \cdot (Ha \cdot Ga)$
10. $(Fa \cdot Ha) \cdot Ga$
11. $Fa \cdot Ha$
12. $\sim \sim (Fa \cdot Ha)$
13. $\sim (\sim Fa \vee \sim Ha)$
14. $\sim (Fa \supset \sim Ha)$
15. $(Fa \supset \sim Ha) \vee Ux[(Fx \cdot Gx) \supset \sim Hx]$
16. $Ux[(Fx \cdot Gx) \supset \sim Hx]$

IV

1. $Ux(Ix \supset \sim Jx)$ **Premiss**
2. $Ux(Kx \supset Ix)$ **Premiss**
3. $\sim Ux(Kx \supset \sim Jx)$
4. $\exists x \sim (Kx \supset \sim Jx)$
5. $\sim (Ka \supset \sim Ja)$
6. $Ia \supset \sim Ja$
7. $Ka \supset Ia$
8. $Ka \supset \sim Ja$
9. $\sim (\sim Ka \vee \sim Ja)$
10. $Ka \cdot Ja$
11. Ka
12. $\sim Ja$
13. $Ja \cdot Ka$
14. Ja
15. $Ja \cdot \sim Ja$
16. $\sim Ux(Kx \supset \sim Jx) \supset (Ja \cdot \sim Ja)$
17. $\sim \sim Ux (Kx \supset \sim Jx)$
18. $Ux(Kx \supset \sim Jx)$

1. $Ux(Lx \supset Nx) \cdot \exists x(Mx \cdot Lx)$ **Premiss**
2. $\sim \exists x(Mx \cdot Nx)$
3. $Ux(Lx \supset Nx)$
4. $\exists x(Mx \cdot Lx) \cdot Ux(Lx \supset Nx)$
5. $\exists x(Mx \cdot Lx)$
6. $Ma \cdot La$
7. Ma
8. $La \cdot Ma$
9. La
10. $La \supset Na$
11. Na
12. $Ux \sim (Mx \cdot Nx)$
13. $\sim (Ma \cdot Na)$
14. $\sim Ma \vee \sim Na$
15. $Ma \supset \sim Na$
16. $\sim Na$
17. $Na \cdot \sim Na$

৩. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ দাও।

1. $Ca, Ux[(Ax \supset Bx) \supset \sim Cx] \quad \therefore \quad Aa$
2. $Ca \cdot Ea, Ux[(Cx \cdot Dx) \equiv \sim Ex] \quad \therefore \quad \sim Da$
3. $Ux(\sim Hx \supset \sim Ex), Ga, Ux\{[Ex \cdot (Fx \vee Gx)] \supset \sim Hx\}$
   $\therefore \quad \sim Ea \cdot Ga$
4. $Ux\{[Hx \cdot (Ix \vee Jx)] \equiv \sim Kx\} \quad \therefore \quad Ux[(Hx \cdot Jx) \supset \sim Kx\}$
5. $Ux(Lx \supset Mx), Ux[Jx \supset (Kx \cdot Lx)]$
   $/ \quad Ux[(Jx \vee Lx) \supset Mx]$
6. $Ux[(Lx \cdot Mx) \supset Nx], Ux(Nx \supset \sim Mx)$
   $\exists xLx \quad \therefore \quad \exists x \sim Mx$
7. $\exists xMx, Ux[Mx \supset Nx \vee Ox)]$
   $Ux[Mx \supset (Nx \vee Px)] \quad \therefore \quad \exists x[Nx \vee (Ox \cdot Px)]$
8. $Ux[(Ox \cdot Px) \equiv \sim Qx], \exists x(Qx \cdot Px)$
   $\therefore \quad \exists x \sim (Rx \cdot Ox)$
9. $Ux(Ox \cdot Px), Ux[(Px \cdot Qx) \supset Rx]$
   $Ux[(Ox \cdot Rx) \supset Sx], \exists x \sim Sx$
   $\therefore \quad \exists x(\sim Qx \vee \sim Ox)$
10. $Ux[Tx \supset (Ux \vee Vx)], Ux(Vx \supset Wx)$
   $\therefore \quad Ux[(Tx \supset Wx) \vee Ux]$

৪. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ দাও।

1. $Ux(Ax \supset Bx), Ux(Cx \supset Dx), Ux(Cx \vee Ax)$
   $\therefore \quad Ux(Bx \vee Dx)$
2. $Ux[Dx \supset (Ex \vee Fx)], Ux(Fx \supset \sim Gx)$
   $\therefore \quad Ux[(Dx \cdot Gx) \supset Ex]$
3. $Ux(Gx \supset Jx) \supset Ux(Jx \supset Ix),$
   $Ux(Gx \supset Hx) \cdot Ux(Hx \supset Jx)$
   $\therefore \quad Ux(Gx \supset Ix) \cdot Ux(Hx \supset Ix)$
4. $Ux(Jx \supset Ix), Ux(Ix \supset Lx)$
   $\therefore \quad Ux[Jx \supset (Kx \supset Lx)]$
5. $Ux(Lx \supset Mx) \cdot \exists x(\sim Mx \cdot Nx), Ux(Kx \supset \sim Nx)$
   $\therefore \quad \exists x \sim (Kx \vee Lx)$
6. $\exists x(Ox \cdot \sim Kx), Ux\{[Ox \cdot \sim (Mx \vee Nx)] \supset Kx]$
   $\therefore \quad \exists x[Mx \vee (Nx \cdot Ox)]$
7. $Ux[(Qx \cdot Px) \supset \sim Sx], \exists x(Qx \cdot Sx)$
   $Ux[(Qx \cdot \sim Px) \supset Rx] \quad \therefore \quad \exists x(Qx \cdot Rx)$
8. $\exists x[Sx \cdot \sim (\sim Qx \vee Rx)], Ux[(Sx \cdot Tx) \equiv \sim Qx]$
   $\therefore \quad \exists x[Sx \cdot \sim (Tx \cdot Ux)]$

9. $\exists x[Rx \cdot (\sim Sx \cdot Tx)]$, $Ux[Rx \supset (Qx \supset Ux)]$
   $Ux[(Tx \cdot Px) \supset Vx]$, $Ux[(\sim Qx \cdot \sim Px) \supset Sx]$
   $\therefore\ \exists x(Ux \vee Vx)$
10. $Ux[(Vx \vee Xx) \supset Ux]$, $Ux[(Ux \vee Vx) \supset Wx]$
   $\exists x[Tx \cdot \sim(Sx \vee Yx)]$, $Ux[Wx \supset (Zx \cdot Sx)]$
   $\therefore\ \exists x[Xx \cdot (Yx \cdot \sim Zx)]$

৫. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ দাও।

1. $Ux[(Ax \cdot Bx) \supset Cx]$, $Ux(Dx \supset Ax)$, $\exists x(Bx \cdot Dx)$
   $\therefore\ \exists x(Cx \cdot Dx)$
2. $Ux[Hx \supset (Bx \equiv \sim Tx)]$, $\exists x(Hx \cdot \sim Bx)$,
   $\exists x(Hx \cdot \sim Tx)$ $\therefore\ \exists x(Hx \cdot Tx)$
3. $Ux[Ax \supset (Bx \vee Cx)]$, $Ux[(Bx \vee Cx) \supset Dx]$
   $\therefore\ Ux[(Ax \cdot \sim Bx) \supset (Dx \cdot Cx)]$
4. $Ux[Dx \supset (Ex \cdot Fx)]$, $\exists x \sim Fx$ $\therefore\ \exists x \sim Dx$

—Gustason and Ulrich

5. $Ux[(Px \cdot Qx) \supset (Rx \supset Sx)]$, $\exists x(Rx \cdot \sim Sx)$
   $\therefore\ \exists x \sim (Px \cdot Qx)$
6. $\sim \exists x(Ax \cdot \sim Bx)$, $Ux[(Ax \supset Bx) \supset Cx]$ $\therefore$ $UxCx$
7. $Ux[(Px \vee Qx) \supset (Rx \vee Sx)]$, $\exists x(Px \cdot \sim Rx)$
   $\therefore\ \exists x(Px \cdot Sx)$
8. Meaninglessness is boredom. Boredom is frustration. Frustration is despair. Despair is anxiety. Therefore meaninglesness is anxiety.
   (Mx, Bx, Fx, Dx, Ax)
9. Any violence is either dangerous or foolhardy. Anything that is either dangerous or foolhardy is risky. Thus if anything is advisable, then if it is violent it is risky.
   (Vx, Dx, Fx, Rx, Ax)

—Kilgore

৭

প্রমাণ পদ্ধতি ঃ
প্রচলিত অবরোহী পদ্ধতি

১. ভূমিকা

আমরা দেখেছি, মুখ্য পদ্ধতিতে প্রমাণ দিতে হলে যে নিয়ম (রূপান্তর সূত্র ও যুক্তিবিধি) প্রয়োগ করার দরকার হয় সেগুলি হল

বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের নিয়ম, QE সূত্র, আর
কেবল দুটি বিধেয় যুক্তিবিধি—UI ও EI

এ যুক্তিবিধিগুলি হল মানক অপনয় বিধি ; এগুলি প্রয়োগ করে বাক্যকে মানকবন্ধন থেকে মুক্ত করা যায়, ও নিষ্কাশন করা যায় (মানকবিহীন) ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য। এখন যে পদ্ধতির কথা বলতে যাচ্ছি তার নাম দিয়েছি প্রচলিত পদ্ধতি। এ পদ্ধতি আরও দুটো বিধেয়-যুক্তি বিধির প্রয়োগ অনুমোদন করে। এ বিধি দুটো হল ঃ

(Rule of)

Existential Generalization (EG) ও
Universal Generalization (UG)

এ বিধিগুলির লক্ষ্য মানকীকরণ—মানকবিহীন বাক্যে মানক নিবেশ, আগম বা উপনয় (introduction)। এদের আমরা মানক উপনয়ের বিধি বলে উল্লেখ করব।

২. সাত্ত্বিকমানকিতকরণ
সাত্ত্বিক-মানক উপনয় বিধি
Existential Generalization (EG)

বিধিটি এভাবে ব্যক্ত করতে পারি ঃ

কোনো ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য দেওয়া থাকলে ঐ বাক্যের ব্যক্তিনামটির পরিবর্তে কোনো ব্যক্তিগ্রাহক-(যেমন x)-ব্যবহার-করে-পাওয়া (মুক্ত) বাক্যটিকে সাত্ত্বিক মানকিত করলে যে বাক্য পাওয়া যায় তা মূল বাক্যটি থেকে বৈধভাবে নিষ্কাশিত হয়েছে বলে দাবী করা যায়,

বা সংক্ষেপে এভাবে—

P-বিধেয়ক কোনো ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য থেকে *P*-বিধেয়ক সাত্ত্বিকমানকবদ্ধ বাক্য বৈধভাবে নিষ্কাশন করা যায়।

তার মানে, এ বিধি অনুসারে

$$\begin{array}{cccc} Fa & Fb & Gb & Gc \cdot Hc \\ \therefore\ \exists xFx & \therefore\ \exists xFx & \therefore\ \exists xGx & \therefore\ \exists x(Gx \cdot Hx) \end{array}$$

এ যুক্তি-আকারগুলি বৈধ। এদের সাধারণ আকার এভাবে দেখাতে পারি

হেতুবাক্যের আকার : বিধেয় ব্যক্তিনাম

সিদ্ধান্তের আকার : $\exists x$ বিধেয় x

বা এভাবে

$$\begin{array}{l} \quad \cdots\cdots\cdots a \cdots\cdots\cdots \\ \therefore\ \exists x(\cdots\cdots\cdots x \cdots\cdots\cdots) \end{array}$$

ধর, P হল কোনো বিধেয়, n হল কোনো ব্যক্তিনাম, আর x হল ব্যক্তিগ্রাহক। তাহলে উক্ত আকারের যুক্তির সাধারণ আকার এভাবে দেখানো যায় :

$$\begin{array}{l} \quad Pn \\ \therefore\ \exists xPx \end{array}$$

EG বিধি অনুসারে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলি বৈধ।

রাম বোকা	Fn
∴ অন্তত এক ব্যক্তি বোকা	$\therefore\ \exists xFx$
এ ফুলটা লাল	$Ft \cdot Rt$
∴ কোনো কোনো ফুল লাল	$\therefore\ \exists x(Fx \cdot Rx)$

এ যুক্তিবিধি মানার সুবিধা হল এই ঃ অপরোক্ষ ভাবেও (IP প্রয়োগ না করেও) $\exists x$-বদ্ধ বাক্য নিষ্কাশন করা যায়। লক্ষ করে থাকবে, আমরা এতক্ষণ এরূপ বাক্য নিষ্কাশন করতে গিয়ে সব ক্ষেত্রে IP-এর সাহায্য নিয়েছি। কিন্তু নিম্নোক্ত উদাহরণগুলিতে অপরোক্ষ পদ্ধতিতে $\exists x$-বদ্ধ বাক্য নিষ্কাশন করা হল।

Datisi : Amp, Ims ∴ Isp

প্রমাণ

1.	$\mathrm{U}x(Mx \supset Px)$	
2.	$\exists x(Mx \cdot Sx)$	$/\therefore\ \exists x(Sx \cdot Px)$
3.	$Ma \cdot Sa$	2 EI
4.	Ma	
5.	$Sa \cdot Ma$	
6.	Sa	
7.	$Ma \supset Pa$	1 UI
8.	Pa	7,4 MP
9.	$Sa \cdot Pa$	6,8 Adj.
10.	$\exists x(Sx \cdot Px)$	9 EG

Fresison : Epm, Ims ∴ Osp

প্রমাণ

1. $Ux(Px \supset \sim Mx)$
2. $\exists x(Mx \cdot Sx)$ $/\therefore$ $\exists x(Sx \cdot \sim Px)$
3. $Ma \cdot Sa$ 2 EI
4. Ma
5. $Sa \cdot Ma$
6. Sa
7. $Pa \supset \sim Ma$ 1 UI
8. $\sim \sim Ma$ 4 DN
9. $\sim Pa$ 7,8 MT
10. $Sa \cdot \sim Pa$ 6,9 Adj.
11. $\exists x(Sx \cdot \sim Px)$ 10 EG

EG যুক্তিবিধির ন্যায্যতা সম্পর্কে প্রশ্ন ওঠার কথা নয়। প্রথম যুক্তিটি নেওয়া যাক। রাম বোকা—এ কথা সত্য হলে, বলা বাহুল্য, এ কথা অবশ্যই বলা যাবে যে : অন্তত এক ব্যক্তি বোকা। EG যুক্তিবিধি ও বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের Add (Addition)-এর সাদৃশ্য লক্ষণীয়। আমরা জানি, $\exists x$-বদ্ধ বাক্য হল আসলে অসীমিত বৈকল্পিক বাক্য। কাজেই

$$Fa$$
$$\therefore \ \exists xFx$$

এ আকারটি এভাবে লেখা যায়

$$Fa$$
$$\therefore \ Fa \vee Fb \vee Fc \vee Fd \vee Fe \vee \cdots\cdots$$

বলা বাহুল্য, শেষোক্ত আকারটি নিম্নোক্ত আকারের (Add. যুক্তি-আকারের) অনুরূপ ঃ

$$p$$
$$\therefore \ p \vee q$$

সেরূপ

$$Fa \cdot Ga$$
$$\therefore \ \exists x(Fx \cdot Gx)$$

লেখা যায় এভাবে

$$Fa \cdot Ga$$
$$\therefore \ (Fa \cdot Ga) \vee (Fb \cdot Gb) \vee (Fc \cdot Gc) \vee \cdots\cdots$$

বলা বাহুল্য, এ আকারটিও $p \therefore p \vee q$-এর অনুরূপ। বলা যায়, যে বিধি বাক্য-যুক্তিবিজ্ঞানে Add. নামে চিহ্নিত হয় তার অনুরূপ বিধি বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানে EG রূপ ধারণ করে। এ কথাও বলতে পারি, একই মূল বিধি বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানে এক রূপ, আর বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানে আর এক রূপ, পরিগ্রহ করে।

EG প্রয়োগের আরও উদাহরণ

পূর্ববর্তী বিভাগে EG প্রয়োগ করে Datisi ও Fresison-এর অবরোহী প্রমাণ দেওয়া হয়েছে। মুখ্য পদ্ধতিতে (IP প্রয়োগ করে) এদের প্রমাণ গঠন কর। তাহলে EG প্রয়োগের সুবিধা বুঝতে পারবে। দেখবে, EG-এর সাহায্য না নিয়ে মুখ্য পদ্ধতিতে $\exists x$-বদ্ধ বাক্য নিষ্কাশন করতে হলে অবরোহ অপেক্ষাকৃত দীর্ঘাকার ধারণ করে।

অধ্যায় ৬-এতে "EI প্রয়োগের আরও উদাহরণ" নামক বিভাগে (পৃঃ ৮০) দুটি যুক্তির পরোক্ষ প্রমাণ দেওয়া হয়েছে। নিচে সে দুটি যুক্তিরই বিকল্প প্রমাণ (অপরোক্ষ প্রমাণ, EG প্রয়োগ করে প্রমাণ) দেওয়া হল। প্রমাণগুলি তুলনা কর। দেখবে, EG প্রয়োগ করলে অবরোহ অপেক্ষাকৃত হ্রস্বকায় রূপ ধারণ করে।

উদাহরণ 1

$\exists x(Ax \cdot \sim Bx)$
$\text{U}x\{[Ax \cdot \sim(Cx \vee Dx)] \supset Bx\}$
$\therefore\ \exists x[Cx \vee (Dx \cdot Ax)]$

অবরোহ

1.	$\exists x(Ax \cdot \sim Bx)$	
2.	$\text{U}x\{[Ax \cdot \sim(Cx \vee Dx)] \supset Bx\}$	$/\therefore\ \exists x[Cx \vee (Dx \cdot Ax)]$
3.	$Aa \cdot \sim Ba$	1 EI
4.	Aa	
5.	$\sim Ba \cdot Aa$	
6.	$\sim Ba$	
7.	$[Aa \cdot \sim(Ca \vee Da)] \supset Ba$	2 UI
8.	$\sim[Aa \cdot \sim(Ca \vee Da)]$	7,6 MT
9.	$\sim Aa \vee (Ca \vee Da)$	8 DM, DN
10.	$Aa \supset (Ca \vee Da)$	
11.	$Ca \vee Da$	10,4 MP
12.	$Aa \vee Ca$	4 Add
13.	$Ca \vee Aa$	
14.	$(Ca \vee Da) \cdot (Ca \vee Aa)$	11, 13 Adj
15.	$Ca \vee (Da \cdot Aa)$	
16.	$\exists x[Cx \vee (Dx \cdot Ax)]$	15 EG

উদাহরণ 2

$\exists x[Ax \cdot \sim(\sim Bx \vee Cx)]$
$\text{U}x[(Ax \cdot Dx) \equiv \sim Bx]$
$\therefore\ \exists x[Ax \cdot \sim(Dx \cdot Ex)]$

অবরোহ

1. $\exists x[Ax \cdot \sim(\sim Bx \vee Cx)]$
2. $Ux[(Ax \cdot Dx) \equiv \sim Bx]$ $/ \therefore \exists x[Ax \cdot \sim(Dx \cdot Ex)]$
3. $Aa \cdot \sim(\sim Ba \vee Ca)$ 1 EI
4. Aa
5. 3 Com.
6. $\sim(\sim Ba \vee Ca)$ 5 Simp.
7. $Ba \cdot \sim Ca$
8. Ba
9. $(Aa \cdot Da) \equiv \sim Ba$ 2 UI
10. $[(Aa \cdot Da) \supset \sim Ba] \cdot [\sim Ba \supset (Aa \cdot Da)]$
11. $(Aa \cdot Da) \supset \sim Ba$
12. $\sim(Aa \cdot Da)$ 11, 8 DN, MT
13. $\sim Aa \vee \sim Da$
14. $Aa \supset \sim Da$
15. $\sim Da$ 14, 4 MP
16. $\sim Da \vee \sim Ea$ 15 Add.
17. $\sim(Da \cdot Ea)$
18. $Aa \cdot \sim(Da \cdot Ea)$ 4, 17 Adj.
19. $\exists x[Ax \cdot \sim(Dx \cdot Ex)]$ 18 EG

৩. সার্বিকমানকিতকরণ
সার্বিক-মানক উপনয় বিধি
Universal Generalization (UG)

EG প্রসঙ্গে দেখেছি, অপরোক্ষ পদ্ধতিতে $\exists x$-বদ্ধ বাক্য নিষ্কাশন করা যায়। অনুরূপ-ভাবে IP প্রয়োগ না করে আমরা Ux-বদ্ধ বাক্য নিষ্কাশন করতে চাই। কিভাবে এরূপ নিষ্কাশন সম্ভব ?

একটা উদাহরণ।

1. $Ux(Fx \supset Gx)$
2. $Ux(Gx \supset Hx)$ $/ \therefore Ux(Fx \supset Hx)$

ধর, এ যুক্তির বৈধতা-প্রমাণ দিতে হবে ; এবং ধর, আমরা এভাবে অগ্রসর হলাম :

3. $Fa \supset Ga$ 1 UI
4. $Ga \supset Ha$ 2 UI
5. $Fa \supset Ha$ 3, 4 HS

এতদূর এগুনো গেল। তারপর ? তারপর আরও অগ্রসর হওয়া যেত যদি এমন কোনো

বিধি পেতাম যা—সর্বশেষ বাক্যে a-এর জায়গায় গ্রাহক x-এর ব্যবহার, আর Ux-এর আগম, অনুমোদন করে। তার মানে, ঈপ্সিত সিদ্ধান্ত প্রমাণ করা যেত যদি—EG-এর অনুরূপ, UG বলে কোনো যুক্তিবিধি আমাদের হাতে থাকত, যদি

$$\cdots\cdots\cdots a \cdots\cdots\cdots$$
$$\therefore \quad Ux(\cdots\cdots x \cdots\cdots)$$

আকারের বিধি থাকত। তাহলে আমরা এভাবে উক্ত অসম্পূর্ণ অবরোহ সম্পূর্ণ করতে পারতাম :

6. $Ux(Fx \supset Ax)$ 5 UG

এখানে 5-এর ভিত্তিতে সার্বিকমানকিতকরণ করা হয়েছে। সাধারণভাবে বলতে পারি

$$Fa$$
$$\therefore \quad UxFx$$

এরূপ অবরোহণের বেলায় বলা হয় : Fa-এর ভিত্তিতে সার্বিকমানকিতকরণ করা হল, সার্বিক মানক আমদানি করা হল। সহজে বলবার সুবিধার জন্য আমরা এ রকম বাকভঙ্গি প্রয়োগ করব :

a-বিষয়ক বাক্যের ভিত্তিতে Ux আমদানি করা হল,
'a' নামের ভিত্তিতে Ux-এর উপনয় হল, বা
'a' নামের ভিত্তিতে Ux দিয়ে সার্বিকীকরণ করা হল।

Ux-বদ্ধ বাক্য অপরোক্ষভাবে নিষ্কাশন করতে হলে উক্ত যুক্তিবিধি, UG বিধি, আমাদের দরকার, ঠিক। কিন্তু মনে হয়, UG অনুমোদন করা যায় না। কেন মনে হয়, দেখ। সঙ্গতভাবে দাবী করা যায় যে

$$Fa \therefore \exists xFx$$

কিন্তু এ দাবী সঙ্গতভাবে করা যায় না যে

$$Fa \therefore UxFx$$

যথা, সক্রেটিস্ দার্শনিক (সক্রেটিস্$=a$, দার্শনিক$=F$), সুতরাং সবাই দার্শনিক। সোজা কথায়

This S is P,
∴ some S are P. (EG)

এ যুক্তি-আকার বৈধ, কিন্তু

This S is P,
∴ all S are P. (UG)

এ যুক্তি-আকার অবৈধ।

আমরা একটা সমস্যার সম্মুখীন হলাম। UG হেন কোনো বিধি থাকলে আমাদের সুবিধা, অথচ এরূপ যুক্তিবিধি মানা অসঙ্গত বলে মনে হয়। যুক্তিবিজ্ঞানীরা এ সমস্যার সমাধান করেন এভাবে। তারা বলেন : তোমরা যে রকম UG-এর কথা বলছ সে রকম অবাধ বিধি অনুমোদন করা যায় না। তবে

$$Fa$$
$$\therefore \; \text{U}xFx \qquad \text{(UG)}$$

এ রকম বিধিকে বিভিন্ন শর্ত দিয়ে, বিভিন্ন "বারণ"-এর অনুশাসন দিয়ে, সংযত করে ব্যক্ত করা যায়। এবং এভাবে সংস্কার করে নিলে, UG একটা নির্দোষ যুক্তিবিধি বলে গণ্য হবে। যুক্তিবিজ্ঞানীরা বলেন, UG প্রয়োগ করতে পার : যদি অমুক অমুক নিষিদ্ধ কাজ থেকে বিরত থাক, অমুক অমুক "বারণ" মেনে চল। প্রথমে দেখা যাক্, "বারণ" বা "নিষিদ্ধ"গুলি কী কী। তারপর এ সব নিষিদ্ধ বা বারণের বেড়ী দিয়ে আষ্টেপৃষ্ঠে বেঁধে UG-কে একটা গ্রহণযোগ্য রূপ দেওয়া যাবে।

নিষিদ্ধগুলি ব্যাখ্যা করা হল কয়েকটি অবৈধ অবরোহী "প্রমাণ"-এর উদাহরণ দিয়ে। প্রথমে নেওয়া যাক এ আকারটি :

উদাহরণ ১

$$\text{Ipm, Ems} \; \therefore \; \text{Esp}$$

ধর, কেউ এ যুক্তি-আকারের অবরোহী "প্রমাণ" দিল এভাবে :

1. $\exists x(Px \cdot Mx)$
2. $\text{U}x(Mx \supset \sim Sx)$ $\quad /\therefore \text{U}x(Sx \supset \sim Px)$
3. $Pa \cdot Ma$
4. $Ma \cdot Pa$
5. Ma
6. $Ma \supset \sim Sa$ $\qquad$ 2 UI
7. $\sim Sa$
8. $\sim Sa \vee \sim Pa$ $\qquad$ 7 Add.
9. $Sa \supset \sim Pa$
10. $\text{U}x(Sx \supset \sim Px)$ $\qquad$ 9 UG [অপপ্রয়োগ]

এ অবরোহে নিশ্চয়ই কোথাও কোনো বিধির অপপ্রয়োগ হয়েছে। কেননা এতে একটা অবৈধ আকারকে বৈধ বলে "প্রমাণ" করা হয়েছে। লক্ষণীয়, আলোচ্য যুক্তি-আকারটি অবৈধ—অতিব্যাপ্তি দোষে দুষ্ট। কথাটা এভাবেও বলতে পারি। প্রদত্ত যুক্তি-আকারটি একটি ন্যায় (আকার)। এ ন্যায়ের বৈধতা প্রমাণে একটা আংশিক (ও একটা সার্বিক) বাক্য থেকে একটা সার্বিক বাক্য নিষ্কাশন করা হয়েছে। কিন্তু আমরা জানি, যে ন্যায়ের কোনো হেতুবাক্য আংশিক সে ন্যায়ের সিদ্ধান্ত সার্বিক বাক্য হতে পারে না। এর থেকে বোঝা যায়, ছত্র 10-এতে সার্বিকীকরণ করে ভুল করা হয়েছে। কাজেই এরূপ সার্বিকীকরণ,

UG-এর এরূপ প্রয়োগ, বারণ করা দরকার। এ অপপ্রয়োগ বারণের জন্য উল্লেখ করা হল নিম্নোক্ত নিষিদ্ধটি।

নিষিদ্ধ ১ ঃ যদি EI প্রয়োগের ফলে কোনো নামের, ধর *a*-এর, আগম হয় তাহলে ঐ নামের, *a*-এর, ভিত্তিতে U*x* দিয়ে (সার্বিক) মানকিত-করণ করা চলবে না।

এখন, উক্ত অবরোহে ছত্র 9-এতে যে *a* তার ভিত্তিতে (ছত্র 10-এতে) সার্বিকমানকিতকরণ করা হয়েছে। কিন্তু এই *a* আলোচ্য অবরোহে (ছত্র 3-এতে) আমদানি করা হয়েছে EI দিয়ে। কাজেই সর্বশেষ ছত্রে UG-এর অপপ্রয়োগ হয়েছে।

উদাহরণ ২

All material things are heavy,	$Ux(Mx \supset Hx)$
this stone is a material thing ;	Ma
∴ everything is heavy.	∴ $UxHx$

ধর, কেউ এ যুক্তির অবরোহী "প্রমাণ" দিল এভাবে :

1.	$Ux(Mx \supset Hx)$	
2.	Ma	/∴ $UxHx$
3.	$Ma \supset Ha$	UI
4.	Ha	3,2 MP
5.	$UxHx$	4 UG [অপপ্রয়োগ]

স্পষ্টতই উক্ত যুক্তিটি অবৈধ। প্রদত্ত হেতুবাক্য থেকে বৈধভাবে নিষ্কাশিত হতে পারে : *Ha* (পাথরটি ভারী)। কিন্তু এ কথা বৈধভাবে নিঃসৃত হতে পারে না যে, U*xHx* (সব কিছুই ভারী)। কাজেই এ ক্ষেত্রে UG অপপ্রয়োগ করা হয়েছে। এরূপ অপপ্রয়োগ বারণ করা যায় নিম্নোক্ত নিষিদ্ধটি দিয়ে।

নিষিদ্ধ ২ ঃ কোনো বাক্যের অন্তর্ভুক্ত নাম যদি বাক্যটি-যে-মূল-হেতুবাক্যের--ওপর-নির্ভর-করে-তারও অন্তর্ভুক্ত হয় তাহলে ঐ বাক্যের বা ঐ নামের ভিত্তিতে U*x* দিয়ে সার্বিকীকরণ করা চলবে না।

এ নিষিদ্ধটি এভাবেও ব্যক্ত করা যেত।

> ধর, কোনো নাম, *a*, আছে কোনো বাক্য *q*-তে। এখন, যদি এমন হয় যে *q* যে মূল হেতুবাক্যের (ধর, *p*-এর) ওপর নির্ভর করে তাতেও ঐ নাম, *a*, থাকে—তাহলে *q*-এর, বা *a*-এর, ভিত্তিতে U*x* দিয়ে মানকিত-করণ করা চলবে না।

এখন দেখ, উপরোক্ত অবরোহে 4-এর, *Ha*-এর, ভিত্তিতে সার্বিকীকরণ করা হয়েছে। কিন্তু *Ha* নির্ভর করে 1 আর 2-এর ওপর*। আর 2-এতে, *Ma*-এতে, *a* নামটি আছে।

* *Ha* নির্ভর করে 3 আর 2-এর ওপর। 3 নির্ভর করে 1-এর ওপর। সুতরাং *Ha* নির্ভর করে মূল হেতুবাক্য 1 আর 2-এর ওপর।

সুতরাং এ নামের, বা *Ha*-এর, ভিত্তিতে সার্বিকীকরণ, U*x* দিয়ে মানকিতকরণ, করা অসঙ্গত।

আর একটা উদাহরণ।

1. *Fa*
2. U*xFx* 1 UG [অপপ্রয়োগ]

এখানে স্পষ্টতই UG-এর অপপ্রয়োগ হয়েছে। নিষিদ্ধ 2 দিয়েই এ অপপ্রয়োগ বারণ হয়। এখানে সার্বিকীকরণ করা হয়েছে *a*-এর ভিত্তিতে, এবং *a* আছে *Fa*-তে। এখন, এই *Fa* নির্ভর করে নিজের ওপরই। বলা যায়, *Fa*-এর মূল হেতুবাক্য *Fa*-ই। কাজেই বলা যায়, *Fa* যে বাক্যের ওপর নির্ভর করে তাতে *a* আছে। সুতরাং এ *a* নামের ভিত্তিতে সার্বিকীকরণ করা (যা করা হয়েছে 2-এতে) অবৈধ।

এখন নিষিদ্ধ ১ আর নিষিদ্ধ ২ উল্লেখ করে UG বিধি নিয়োক্তরূপে নির্ভুলভাবে ব্যক্ত করতে পারি।

UG (Universal Generalization)

কোনো (অবরোহিত) ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যের ব্যক্তিনামটির পরিবর্তে কোনো ব্যক্তিগ্রাহক-(ধর *x*)-ব্যবহার-করে-পাওয়া মুক্ত বাক্যটিকে সার্বিকমানকিত করলে যে বাক্য পাওয়া যায় তা ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যটি থেকে নিষ্কাশিত হয়েছে বলে দাবী করা যায়, যদি এমন হয় যে

(১) EI প্রয়োগের ফলে ব্যক্তিনামটির আগম হয় নি, এবং

(২) ব্যক্তিবিষয়ক বাক্যটি যে মূল হেতুবাক্যের ওপর নির্ভর করে তাতে ঐ ব্যক্তিনামটি নেই।

এ সূত্রটি আরও সংক্ষেপে এভাবে ব্যক্ত করা যায় ঃ

অবরোহিত *Pa* থেকে U*xPx* বৈধভাবে নিষ্কাশিত হয়েছে বলে দাবী করা যায়, যদি এমন হয় যে

(১) *a* নামটি EI-এর প্রয়োগ ফল নয়, এবং

(২) *a*-বিষয়ক বাক্যটির যে (মূল) হেতুবাক্য তাতে *a* নেই।

পৃঃ ৯৫-৯৬-এতে যে অবরোহটি দেওয়া আছে তা আবার নেওয়া যাক।

1.	$Ux(Fx \supset Gx)$	
2.	$Ux(Gx \supset Hx)$	$/ \therefore Ux(Fx \supset Hx)$
3.	$Fa \supset Ga$	1 UI
4.	$Ga \supset Ha$	2 UI
5.	$Fa \supset Ha$	3,4 HS
6.	$Ux(Fx \supset Hx)$	5 UG

এ অবরোহে UG নির্ভুলভাবে প্রয়োগ করা হয়েছে। এতে সার্বিক মানকিতকরণ করা হয়েছে $Fa \supset Ha$—এ বাক্যের, বা এ বাক্যের a নামটির, ভিত্তিতে। এখন এ বাক্য, 5, নির্ভর করে 3, 4-এর ওপর। 3 নির্ভর করে 1-এর, আর 4 নির্ভর করে 2-এর ওপর। সুতরাং 5 নির্ভর করে 1 আর 2-এর ওপর (এগুলি 5-এর মূল হেতুবাক্য)। লক্ষণীয়, 1, 2-এতে কোথাও a নেই। আরও লক্ষণীয়, এ অবরোহে EI প্রয়োগ করে a (3 সংখ্যক ছত্রে) আমদানি করা হয় নি। সুতরাং এখানে কোনো "নিষিদ্ধ" লঙ্ঘন করা হয় নি। সুতরাং ছত্র 6-এতে UG-এর প্রয়োগ নির্ভুল।

UG মানার সুবিধা হল এই : অপরোক্ষভাবেও (মানে, IP প্রয়োগ না করেও) Ux-বদ্ধ বাক্য নিষ্কাশন করা যায়। এর আগের অধ্যায়ে আমরা এরূপ বাক্য নিষ্কাশন করতে সব সময় IP-এর সাহায্য নিয়েছি। কিন্তু নিম্নোক্ত উদাহরণগুলিতে অপরোক্ষ পদ্ধতিতে Ux-বদ্ধ বাক্য নিষ্কাশন করা হল।

Cesare : Epm, Asm ∴ Esp

1. $Ux(Px \supset \sim Mx)$
2. $Ux(Sx \supset Mx)$ /∴ $Ux(Sx \supset \sim Px)$
3. $Pa \supset \sim Ma$
4. $Sa \supset Ma$
5. $Ma \supset \sim Pa$ 3 Trans., DN
6. $Sa \supset \sim Pa$ 4,5 HS
7. $Ux(Sx \supset \sim Px)$ 6 UG

Camenes : Apm, Ems ∴ Esp

1. $Ux(Px \supset Mx)$
2. $Ux(Mx \supset \sim Sx)$ /∴ $Ux(Sx \supset \sim Px)$
3. $Pa \supset Ma$
4. $Ma \supset \sim Sa$
5. $Pa \supset \sim Sa$
6. $Sa \supset \sim Pa$ 5, Trans., DN
7. $Ux(Sx \supset \sim Px)$ 6 UG

মুখ্য পদ্ধতিতে (IP প্রয়োগ করে) Cesare ও Camenes-এর প্রমাণ গঠন কর। তাহলে UG প্রয়োগের সুবিধা বুঝতে পারবে। দেখবে UG-এর সাহায্য না নিয়ে মুখ্য পদ্ধতিতে Ux-বদ্ধ বাক্য নিষ্কাশন করতে হলে অবরোহ অনেক দীর্ঘাকার ধারণ করে।

৪. প্রচলিত পদ্ধতি ও CP

আমরা দেখেছি, যে পদ্ধতি এ অধ্যায়ে ব্যাখ্যা করা হল (যার নাম দিয়েছি প্রচলিত পদ্ধতি) সেটা অপরোক্ষ পদ্ধতি। EG, UG প্রয়োগ করে এতে সরাসরি Ux-

বদ্ধ বা Ux-বদ্ধ বাক্য নিষ্কাশন করা যায়। আর এতে CP যুক্তিবিধি প্রয়োগ করতে, অবরোহে প্রাকল্পিক প্রমাণের (CP-এর) রূপ দিতে, কোনো বাধা নেই। CP ব্যবহার করে নিচে কয়টি যুক্তির বৈধতা-প্রমাণ দেওয়া হল। বলা বাহুল্য, এগুলি প্রচলিত পদ্ধতি প্রয়োগের উদাহরণ।

উদাহরণ ১

$$\begin{aligned} & \mathrm{U}x[(Ax \vee Bx) \supset Cx] \\ & \mathrm{U}x[(Cx \vee Dx) \supset Ex] \\ \therefore\ & \mathrm{U}x(Ax \supset Ex) \end{aligned}$$

অবরোহ

1. $\mathrm{U}x[(Ax \vee Bx) \supset Cx]$
2. $\mathrm{U}x[(Cx \vee Dx) \supset Ex]$ $/ \therefore\ \mathrm{U}x(Ax \supset Ex)$

→3. Aa
4. $(Aa \vee Ba) \supset Ca$ 1 UI
5. $(Ca \vee Da) \supset Ea$ 2 UI
6. $Aa \vee Ba$ 3 Add.
7. Ca
8. $Ca \vee Da$
9. Ea

10. $Aa \supset Ea$ $3 \rightarrow 9$ CP
11. $\mathrm{U}x(Ax \supset Ex)$ 10 UG

উদাহরণ ২

$$\begin{aligned} & \mathrm{U}x[(Fx \vee Gx) \supset (Ix \cdot Jx)] \\ \therefore\ & \mathrm{U}x(Fx \supset Jx) \end{aligned}$$

অবরোহ

1. $\mathrm{U}x[(Fx \vee Gx) \supset (Ix \cdot Jx)]$ $/ \therefore\ \mathrm{U}x(Fx \supset Jx)$

→2. Fa
3. $(Fa \vee Ga) \supset (Ia \cdot Ja)$
4. $Fa \vee Ga$ 2 Add.
5. $Ia \cdot Ja$
6. $Ja \cdot Ia$
7. Ja

8. $Fa \supset Ja$
9. $\mathrm{U}x(Fx \supset Jx)$

উদাহরণ ৩

$$\begin{aligned} & \mathrm{U}x\{(Kx \vee Lx) \supset [(Mx \vee Nx) \supset Ox]\} \\ \therefore\ & \mathrm{U}x[Kx \supset (Mx \supset Ox)] \end{aligned}$$

অবরোহ

1. $Ux\{(Kx \vee Lx) \supset [(Mx \vee Nx) \supset Ox]\}$ $/\therefore\ Ux[Kx \supset (Mx \supset Ox)]$
2. Ka
3. Ma
4. $(Ka \vee La) \supset [(Ma \vee Na) \supset Oa]$
5. $Ka \vee La$ — 2 Add.
6. $(Ma \vee Na) \supset Oa$
7. $Ma \vee Na$ — 3 Add.
8. Oa
9. $Ma \supset Oa$
10. $Ka \supset (Ma \supset Oa)$
11. $Ux[Kx \supset (Mx \supset Ox)]$

CP বিধি ব্যবহার না করে উক্ত যুক্তিগুলির অবরোহী প্রমাণ গঠন কর। তাহলেই CP বিধির গুরুত্ব বুঝতে পারবে। দেখবে, CP বিধি প্রয়োগ না করে প্রমাণ করলে অবরোহ অনেক ক্ষেত্রে বিশাল আকার ধারণ করে। অপরপক্ষে CP বিধি প্রয়োগ করলে সহজে প্রমাণ সংক্ষেপ করা যায়, অবরোহকে অনেক হ্রস্বকায় করা যায়।

নিচে আরও দুটি যুক্তি নিয়ে, প্রত্যেকটির দু রকম প্রমাণ দেওয়া হল—একবার CP প্রয়োগ না করে।

উদাহরণ ৪

$$Ux(Px \supset Qx)$$
$$Ux(Rx \supset Sx)$$
$$\therefore\ Ux[(Px \cdot Rx) \supset (Qx \cdot Sx)]$$

সাধারণ প্রমাণ

1. $Ux(Px \supset Qx)$
2. $Ux(Rx \supset Sx)$ $/\therefore\ Ux[(Px \cdot Rx) \supset (Qx \cdot Sx)]$
3. $Pa \supset Qa$
4. $Ra \supset Sa$
5. $\sim Pa \vee Qa$ — 3 Def $\supset$
6. $(\sim Pa \vee Qa) \vee \sim Ra$ — 5 Add.
7. $\sim Ra \vee (\sim Pa \vee Qa)$
8. $(\sim Ra \vee \sim Pa) \vee Qa$ — 7 Assoc.
9. $\sim Ra \vee Sa$ — 4 Def $\supset$
10. $(\sim Ra \vee Sa) \vee \sim Pa$ — 9 Add.
11. $\sim Pa \vee (\sim Ra \vee Sa)$
12. $(\sim Pa \vee \sim Ra) \vee Sa$ — 11 Assoc.
13. $(\sim Pa \vee \sim Ra) \vee Qa$ — 8 Com.
14. — 13,12 Adj.
15. $(\sim Pa \vee \sim Ra) \vee (Qa \cdot Sa)$ — 14 Dist.
16. $\sim(Pa \cdot Ra) \vee (Qa \cdot Sa)$ — 15 DM
17. $(Pa \cdot Ra) \supset (Qa \cdot Sa)$
18. $Ux[(Px \cdot Rx) \supset (Qx \cdot Sx)]$

প্রাকল্পিক প্রমাণ

1. $Ux(Px \supset Qx)$
2. $Ux(Rx \supset Sx)$ $/\therefore\ Ux[(Px \cdot Rx) \supset (Qx \cdot Sx)]$
3. $Pa \cdot Ra$
4. Pa
5. $Ra \cdot Pa$
6. Ra
7. $Pa \supset Qa$
8. $Ra \supset Sa$
9. Qa — 7,4 MP
10. Sa — 3,6 MP
11. $Qa \cdot Sa$
12. $(Pa \cdot Ra) \supset (Qa \cdot Sa)$
13. $Ux[(Px \cdot Rx) \supset (Qx \cdot Sx)]$

উদাহরণ ৫

$$\mathrm{U}x(Tx \supset Ux)$$
$$\mathrm{U}x(Vx \supset Wx)$$
$$\therefore\ \mathrm{U}x[(Tx \vee Vx) \supset (Ux \vee Wx)]$$

সাধারণ প্রমাণ

1.	$\mathrm{U}x(Tx \supset Ux)$	
2.	$\mathrm{U}x(Vx \supset Wx)$ /∴ $\mathrm{U}x[(Tx \vee Vx) \supset (Ux \vee Wx)]$	
3.	$Ta \supset Ua$	
4.	$Va \supset Wa$	
5.	$\sim Ta \vee Ua$	3 Def ⊃
6.	$(\sim Ta \vee Ua) \vee Wa$	5 Add.
7.	$\sim Ta \vee (Ua \vee Wa)$	
8.	$\sim Va \vee Wa$	4 Def ⊃
9.	$(\sim Va \vee Wa) \vee Ua$	8 Add.
10.	$\sim Va \vee (Wa \vee Ua)$	9 Assoc.
11.	$\sim Va \vee (Ua \vee Wa)$	10 Com.
12.	$(Ua \vee Wa) \vee \sim Va$	11 Com.
13.	$(Ua \vee Wa) \vee \sim Ta$	7 Com.
14.		13, 12 Adj.
15.	$(Ua \vee Wa) \vee (\sim Ta \cdot \sim Va)$	14 Dist.
16.	$(Ua \vee Wa) \vee \sim(Ta \vee Va)$	15 DM
17.	$\sim(Ta \vee Va) \vee (Ua \vee Wa)$	
18.	$(Ta \vee Va) \supset (Ua \vee Wa)$	
19.	$\mathrm{U}x[(Tx \vee Vx) \supset (Ux \vee Wx)]$	

প্রাকল্পিক প্রমাণ

1.	$\mathrm{U}x(Tx \supset Ux)$	
2.	$\mathrm{U}x(Vx \supset Wx)$ /∴ $\mathrm{U}x[(Tx \vee Vx) \supset (Ux \vee Wx)]$	
→3.	$Ta \vee Va$	
4.	$Ta \supset Ua$	
5.	$Va \supset Wa$	
6.		4,5 Adj.
7.	$Ua \vee Wa$	6,3 CD
8.	$(Ta \vee Va) \supset (Ua \vee Wa)$	
9.	$\mathrm{U}x[(Tx \vee Vx) \supset (Ux \vee Wx)]$	

৫. CP প্রসঙ্গে আরও দু একটা কথা

CP প্রসঙ্গে আরও দু একটা কথা, বিশেষ করে দু একটা পারিভাষিক শব্দের অর্থ, বলে নেওয়া দরকার মনে করছি।

প্রকল্প (Assumption)

বদ্ধ তীরের ফলামুখে যে বাক্য, বলা বাহুল্য, তা হল একটা প্রক্ষিপ্ত হেতুবাক্য, আমাদের-ধরে-নেওয়া বাক্য, assumption। এ কথাটার, assumption-এর, প্রতিশব্দ হিসাবে আমরা প্রকল্প কথাটি ব্যবহার করব।

প্রকল্পের প্রমাণ পরিধি (Scope of Assumption)

উপপ্রমাণ (Subordinate Proof)

আমরা জানি, কোনো অবরোহে প্রকল্প হিসাবে কোনো বাক্য নিলে সে বাক্যটির (বদ্ধ তীরের ফলা নির্দেশিত বাক্যের) পূর্বকল্পীকরণ (conditionalization) দরকার।

আরও জানি, পূর্বকল্পীকরণ করে যে বাক্য পাওয়া যায় তা লেখা হয় বক্র তীরের লেজের, পালকের, ঠিক নিচে। এখন, কোনো একটি প্রকল্প থেকে সুরু করে, পূর্বকল্পীকরণ-করে-পাওয়া বাক্যের অব্যবহিত পূর্ববর্তী বাক্য পর্যন্ত (মানে, বক্র তীরের অন্তর্ভুক্ত সর্বশেষ বাক্য পর্যন্ত) যে অবরোহ-খণ্ড তাকে বলে (মূল প্রমাণের অন্তর্ভুক্ত) উপপ্রমাণ।

কথাটা এভাবে বলতে পারি। বক্র তীর যেন তিনধারবিশিষ্ট একটা বাক্স। এ রকম কোনো বাক্সের মধ্যে যা থাকে তাকে বলে উপপ্রমাণ। উপপ্রমাণ সুরু হয় কোনো প্রকল্প, ধর প, দিয়ে। প থেকে সুরু করে উপপ্রমাণটির শেষ ছত্র পর্যন্ত যে বাক্য সমষ্টি তাকে বলে প-এর প্রমাণ পরিধি। প্রত্যেক প্রকল্পের প্রমাণ পরিধির একটা সীমা আছে, তা কখনও চরম সিদ্ধান্ত (মূল প্রমাণের সর্বশেষ বাক্য) পর্যন্ত বিস্তৃত হতে পারে না। অনেকে প্রত্যেক উপপ্রমাণকে একটু ডান ধারে সরিয়ে দেখান। বাক্য যুক্তিবিজ্ঞান থেকে দুটো উদাহরণ।

1. $P \supset Q$
2. $Q \supset R$ $\quad /\therefore \; P \equiv (P \cdot R)$
   - →3. P
   - 4. Q — 1, 3 MP
   - 5. R — 2, 4 MP
   - 6. $P \cdot R$ — 3, 5 Adj.

[উপপ্রমাণ ১
এখানে P-এর প্রমাণ পরিধি 6-এর $P \cdot R$ পর্যন্ত বিস্তৃত।]

7. $P \supset (P \cdot R)$ — 3→6 CP
   - →8. $P \cdot R$
   - 9. P — 8 Simp.

[উপপ্রমাণ ২
এখানে $P \cdot R$-এর প্রমাণ পরিধি 9-এর P পর্যন্ত বিস্তৃত।]

10. $(P \cdot R) \supset P$ — 8→9 CP
11. $[P \supset (P \cdot R)] \cdot [(P \cdot R) \supset P]$ 7, 10 Adj.
12. $P \equiv (P \cdot R)$

আর একটা উদাহরণ।

1. $P \supset (Q \supset R)$
2. $Q \supset (R \supset S)$ $\quad /\therefore \; P \supset (R \supset S)$
   - →3. P
   - 4. $Q \supset R$ — 1, 3 MP
     - →5. Q
     - 6. R — 4, 5 MP
     - 7. $R \supset S$ — 2, 5 MP
     - 8. S — 7, 6 MP
   - 9. $Q \supset S$ — 5→8 CP
10. $P \supset (Q \supset S)$ — 3→9 CP

[এখানে 3-এর প্রমাণ পরিধি 9 পর্যন্ত বিস্তৃত।]

[এখানে 5-এর প্রমাণ পরিধি বিস্তৃত 8 পর্যন্ত।]

আরও একটা কথা। কোনো প্রকল্পের পূর্বকল্পীকরণ হয়ে গেলে প্রকল্পটির কাজও শেষ হয়ে যায়। কাজেই

প্রকল্পটির প্রমাণ পরিধির অন্তর্ভুক্ত কোনো বাক্যকে, পরবর্তী কোনো পর্বে, অন্য বাক্যের সমর্থনে ব্যবহার করা যাবে না।

আগের পৃষ্ঠার প্রথম উদাহরণটির দিকে আবার নজর দাও। দেখ, এখানে 9 নিষ্কাশনের জন্য একটা দ্বিতীয় প্রকল্পের, $P \cdot R$-এর সাহায্য নিতে হয়েছে (ছত্র 8 দ্রষ্টব্য) অথচ আমাদের হাতে এ হেতুবাক্যটি ছিল, ছিল ছত্র 6-এতে। কিন্তু এখানে 6 থেকে 9 নিষ্কাশন করলে ভুল হত। কেননা এ বাক্যটি একটি প্রকল্পের P-এর, প্রমাণ পরিধির অন্তর্ভুক্ত, আর এ প্রমাণ পরিধি 6-এতে শেষ হয়ে গেছে। এ পরিধির অন্তর্ভুক্ত কোনো বাক্যকে পরিধির বাইরের কোনো (পরবর্তী) বাক্যের সমর্থনে ব্যবহার করা যাবে না। এজন্য আমাদের হাতে, 6-এতে, $P \quad R$ থাকা সত্ত্বেও আবার দ্বিতীয় প্রকল্প হিসাবে $P \cdot R$ যুক্ত করতে হল।

৬. অবরোহী প্রমাণ : উপসংহার

আমরা দেখেছি, দুভাবে বিধেয় যুক্তির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ দেওয়া যায়—পরোক্ষভাবে ও অপরোক্ষভাবে। যে পদ্ধতিতে পরোক্ষভাবে অবরোহ গঠন করা হয় তাকে আমরা মুখ্য পদ্ধতি বলে অভিহিত করেছি। আর যে পদ্ধতিতে অপরোক্ষভাবে অবরোহ গঠন করা হয় তাকে অভিহিত করেছি প্রচলিত পদ্ধতি বলে। মুখ্য পদ্ধতিতে যে বিধিগুলির সাহায্য নেওয়া হয় সেগুলি নিচে তালিকাভুক্ত করা হল।

মুখ্য পদ্ধতি : বিধিতালিকা

(১) বাক্যযুক্তির বৈধতার অবরোহী প্রমাণের জন্য ব্যবহৃত সব রূপান্তর সূত্র ও যুক্তিবিধি

(২) QE সূত্র

(৩) EI বিধি

(৪) UI বিধি

লক্ষণীয়, মুখ্য পদ্ধতিতে বৈধতা প্রমাণ করতে হলে কোনো মানক-উপনয়বিধি—EG বা UG—প্রয়োগের প্রয়োজন নেই। এ পদ্ধতিতে কী করা হয় তা লক্ষ করলে দেখবে, এতে থাকে এ পর্বগুলি।

পর্ব ১ : হেতুবাক্য লেখা*

পর্ব ২ : ~ Con নেওয়া, মানে সিদ্ধান্তের নিষেধকে অতিরিক্ত হেতুবাক্য হিসাবে নেওয়া, এবং (দরকার হলে**) QE প্রয়োগ করা

পর্ব ৩ : EI, UI-এর সাহায্যে বাক্যকে মানকমুক্ত করা

পর্ব ৪ : বাক্যযুক্তির-বৈধতা-প্রমাণে-ব্যবহৃত বিভিন্ন রূপান্তর সূত্র ও যুক্তিবিধি প্রয়োগ করে স্ববিরোধিতা. $p \cdot \sim p$ আকারের বাক্য, নিষ্কাশন করা।

বিধেয় যুক্তির পরোক্ষ অবরোহী প্রমাণে এ পর্বগুলিই যে থাকে একটা উদাহরণ নিয়ে তা দেখানো হল।

---

* এবং ইচ্ছা করলে, সর্বশেষ হেতুবাক্যের ডান পাশে "/∴" দিয়ে প্রদত্ত সিদ্ধান্তটি লেখা

** সিদ্ধান্তটি যদি $\sim \exists x (\cdots)$ বা $\sim Ux (\cdots)$ আকারের হয়, তাহলে এ পর্বে QE দরকার হয় না।

উদাহরণ হিসাবে নেওয়া যাক Baroco :

Apm, Osm $\therefore$ Osp

অবরোহ

পর্ব		বাক্য	যুক্তি
পর্ব ১ : হেতুবাক্য……	1.	$Ux(Px \supset Mx)$	
	2.	$\exists x(Sx \cdot \sim Mx)$	$/\therefore\ \exists x(Sx \cdot \sim Px)$
পর্ব ২ : ~Con ……	3.	$\sim \exists x(Sx \cdot \sim Px)$	~Con
	4.	$Ux \sim (Sx \cdot \sim Px)$	3 QE
পর্ব ৩ : EI, UI……	5.	$Sa \cdot \sim Ma$	2 EI
	6.	$Pa \supset Ma$	1 UI
	7.	$\sim(Sa \cdot \sim Pa)$	4 UI
পর্ব ৪ : বাক্যযুক্তির ……$p \cdot \sim p$…… নিষ্কাশন করা	8.	$\sim Sa \vee Pa$	7 DM, DN
	9.	$Sa \supset Pa$	8 Def $\supset$
	10.	Sa	5 Simp.
	11.	Pa	9, 10 MP
	12.	$\sim Ma \cdot Sa$	5 Com
	13.	$\sim Ma$	12 Simp.
	14.	$\sim Pa$	6, 13 MT
	15.	$Pa \cdot \sim Pa$	11, 14 Adj.

এ পর্বগুলির মধ্যে পর্ব ৪-ই সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ। ধরে নিচ্ছি, বাক্যযুক্তির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ গঠনের কায়দা আয়ত্ত করেছ। তা যদি করে থাক, তাহলে বিধেয় যুক্তির পরোক্ষ অবরোহী প্রমাণ গঠন মোটেই কঠিন বলে মনে হওয়ার কথা নয়।

মুখ্য পদ্ধতিতে অবরোহ গঠনের সুবিধা হল এই : এতে UG বা EG প্রয়োগ করার প্রয়োজন হয় না। কাজেই কোথায় UG (বা EG) প্রয়োগ করতে পারি বা পারি না, বা কোথায় কোনটি প্রয়োগ করার দরকার—এসব ভাববার প্রয়োজন হয় না। এজন্য সাম্প্রতিক কালের কোনো কোনো লেখক তাদের লেখা পাঠ্য বইতে কেবল মুখ্য পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা করেছেন (EG বা UG-এর নামও উল্লেখ করেন নি)। তবে EG, UG প্রয়োগ না করে পরোক্ষভাবে অবরোহ গঠন করতে গেলে অবরোহ বিশাল আকার ধারণ করে। এজন্য অনেকে, অধিকাংশ লেখকই, EI, UI, EG, UG—এ চারটি বিধি প্রয়োগের বিধান দেন, মানে অপরোক্ষ পদ্ধতি অনুমোদন করেন। তোমরা যেকোনো পদ্ধতি বেছে নিতে পার।

প্রচলিত অবরোহী পদ্ধতিতে (অপরোক্ষ পদ্ধতিতে) যে বিধিগুলি প্রয়োগ করা হয় সেগুলি নিচে তালিকাভুক্ত করা হল।

প্রচলিত পদ্ধতি : বিধিতালিকা

(১) বাক্যযুক্তির বৈধতার অবরোহী প্রমাণে ব্যবহৃত সব রূপান্তর সূত্র ও যুক্তিবিধি
(২) QE সূত্র
(৩) EI বিধি
(৪) UI বিধি
(৫) EG বিধি
(৬) UG বিধি

প্রচলিত পদ্ধতিতে অবরোহী প্রমাণের যে উদাহরণগুলি দেওয়া হয়েছে সেগুলি লক্ষ করলে দেখবে এ রকম প্রমাণে থাকে এ পর্বগুলি।

পর্ব 1 : হেতুবাক্য লেখা*
পর্ব 2 : EI, UI প্রয়োগ করে বাক্যকে মানকমুক্ত করা
পর্ব 3 : বাক্যযুক্তির বৈধতা প্রমাণে ব্যবহৃত বিভিন্ন নিয়ম প্রয়োগ করে, প্রদত্ত সিদ্ধান্তে EI, UI প্রয়োগ করলে যে আকারের ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য পাওয়া যেত সে আকারের কোনো ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য নিষ্কাশন করা
পর্ব 4 : EG বা UG প্রয়োগ করে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত নিষ্কাশন করা।

বিধেয় যুক্তির প্রচলিত অবরোহী প্রমাণে এ পর্বগুলিই যে থাকে একটা উদাহরণ দিয়ে তা দেখানো হল। উদাহরণ হিসাবে নেওয়া যাক Bocardo :

Omp, Ams ∴ Osp

অবরোহ

পর্ব 1 : হেতুবাক্য……	1.	$\exists x(Mx \cdot \sim Px)$	
	2.	$Ux(Mx \supset Sx)$	/∴ $\exists x(Sx \cdot \sim Px)$
পর্ব 2 : EI, UI……	3.	$Ma \cdot \sim Pa$	1 EI
	4.	$Ma \supset Sa$	2 UI
পর্ব 3 : বাক্যযুক্তির বৈধতা……	5.	Ma	3 Simp.
	6.	$\sim Pa \cdot Ma$	3 Com.
	7.	$\sim Pa$	6 Simp.
	8.	Sa	4, 5 MP
	9.	$Sa \cdot \sim Pa$	8, 7 Adj.
পর্ব 4 : EG বা UG……	10.	$\exists x(Sx \cdot \sim Px)$	9 EG

লক্ষণীয়, এরূপ অবরোহ গঠনের কৌশল হল এই : প্রথমে হেতুবাক্যকে মানকমুক্ত করা হয় এবং সর্বশেষ পর্বে যোগ্য মানক উপনয় করা হয়। মানক অপনয় করতে গিয়ে, মানে দৃষ্টান্তীকরণ করতে গিয়ে, এ কথাগুলি বিশেষভাবে মনে রাখবে :

কোনো অবরোহে EI, UI—এ দুটি বিধিই প্রয়োগ করতে হলে সব সময় প্রথমে EI প্রয়োগ করবে।

---

* এবং সর্বশেষ হেতুবাক্যের ডান পাশে "/∴" দিয়ে প্রদত্ত সিদ্ধান্তটি লেখা।

একই অবরোহে দুবার EI প্রয়োগ করা চলবে না।*

এবার EG, UG প্রয়োগের কথা।

EG প্রয়োগ করার সময় এর "নিষিদ্ধ"গুলির কথা মনে রাখবে।

এটা সহজবোধ্য যে, এরূপ অবরোহে সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ পর্ব হল 3। বাক্যযুক্তির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ গঠনের কায়দা যদি আয়ত্ত করে থাক তাহলে বিধেয় যুক্তির অপরোক্ষ অবরোহী প্রমাণ গঠন মোটেই কঠিন মনে হওয়ার কথা নয়।

এ প্রসঙ্গে তোমাদের একটা সহজ কৌশলের কথা বলব। কোনো বিধেয় যুক্তির বৈধতার প্রমাণ দিতে বললে, তুমি নিশ্চয়ই প্রথমে যুক্তিটি ভাল করে লক্ষ কর। কি করে মধ্যবাক্য পাওয়া যায়, এবং মধ্য বাক্যগুলির সাহায্যে অবাঞ্ছিত বাক্য বা অক্ষরগুলি (সিদ্ধান্তে যেগুলির স্থান নেই সেগুলি) কি করে বর্জন করে সিদ্ধান্তে আসা যায়—তা নিশ্চয়ই তুমি প্রথমে ভেবে নেবে। এ ভাবনা সহজ হবে যদি নিম্নোক্ত নির্দেশগুলি অনুসরণ কর।

প্রথমে প্রদত্ত যুক্তির অবয়বগুলির সব মানক ও গ্রাহক বাদ দিয়ে যুক্তিটি লেখ। মনে কর, বিধেয়গুলি (বড় হাতের অক্ষরগুলি) যেন বিধেয় নয়, এগুলি যেন বাক্যযুক্তির অবয়বের অন্তর্গত আণবিক বাক্য।

এখন, মানক-ও-গ্রাহক-বাদ-দেওয়া নেড়া যুক্তিটি নিয়ে বাক্যযুক্তির বৈধতার নিয়মগুলি প্রয়োগ করে কি করে সিদ্ধান্তটি নিষ্কাশন করা যায়, ভেবে দেখ।

কি করে সিদ্ধান্তটি নিষ্কাশন করা যায় তা যদি বুঝতে পার তাহলে ত প্রায় কার্য উদ্ধার হয়ে গেল। এবার মূল যুক্তির মানক অপনয় করা, বিধেয়ের পাশে ব্যক্তিনাম লেখা, মানক উপনয় করা, কঠিন মনে হবে না।

উদাহরণ ১

ধর, এ যুক্তিটির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ দিতে হবে :

$$\mathrm{U}x(Ax \supset Cx)$$
$$\therefore\ \mathrm{U}x[(Ax \cdot Bx) \supset Cx]$$

এ যুক্তির Ux, x—এসব বাদ দিয়ে পাই

$$A \supset C$$
$$\therefore\ (A \cdot B) \supset C$$

এটা একটা বাক্যযুক্তি। এর বৈশিষ্ট্য হল : একটা অক্ষর B, এর সিদ্ধান্তে আছে অথচ হেতুবাক্যে নেই। স্পষ্টতই B আনতে হবে Add-এর সাহায্যে। তাহলে এভাবে অগ্রসর হতে পারি—

১'

$A \supset C$	
$\sim A \vee C$	Def ⊃
$(\sim A \vee C) \vee \sim B$	Add.
$\sim B \vee (\sim A \vee C)$	Com.
$(\sim B \vee \sim A) \vee C$	Assoc.
$(\sim A \vee \sim B) \vee C$	Com.
$\sim(A \cdot B) \vee C$	DM
$(A \cdot B) \supset C$	Def ⊃

* আরও সঠিকভাবে বলতে গেলে, দুটি (দুটি কেন, একাধিক) ∃x-বদ্ধ বাক্যকে একই নাম দিয়ে দৃষ্টান্তীকরণ করা চলবে না।

এবার যথাস্থানে মানক, গ্রাহক—এসব বসিয়ে মূল যুক্তিটির অবরোহী প্রমাণ গঠন করা যায় অতি সহজে। বলা বাহুল্য, প্রমাণটি এ রূপ গ্রহণ করবে :

১

1.	$Ux(Ax \supset Cx)$	$/\therefore Ux[(Ax \cdot Bx) \supset Cx]$
2.	$Aa \supset Ca$	1 UI
3.	$\sim Aa \vee Ca$	2 Def $\supset$
4.	$(\sim Aa \vee Ca) \vee \sim Ba$	3 Add.
5.	$\sim Ba \vee (\sim Aa \vee Ca)$	4 Com.
6.	$(\sim Ba \vee \sim Aa) \vee Ca$	5 Assoc.
7.	$(\sim Aa \vee \sim Ba) \vee Ca$	6 Com.
8.	$\sim(Aa \cdot Ba) \vee Ca$	7 DM
9.	$(Aa \cdot Ba) \supset Ca$	8 Def $\supset$
10.	$Ux[(Ax \cdot Bx) \supset Cx]$	9 UG

দেখ, ১'-এর প্রত্যেকটি পর্ব ১-এতে অঙ্গীভূত হয়েছে।

উদাহরণ ২

$$\sim \exists x \sim (Ax \supset Bx)$$
$$\sim Ux(Cx \supset Bx)$$
$$\therefore \sim Ux(Cx \supset Ax)$$

এ যুক্তির মানক ও গ্রাহক বাদ দিয়ে পাই

$$\sim \sim(A \supset B)$$
$$\sim(C \supset B)$$
$$\therefore \sim(C \supset A)$$

যদি এ যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করতে বলা হত তাহলে আমরা এভাবে অগ্রসর হতাম ও সিদ্ধান্তটি নিষ্কাশন করতাম।

২'

$n.$	$\sim \sim(A \supset B)$	
$n+1$	$A \supset B$	
$n+2$	$\sim(C \supset B)$	
$n+3$	$\sim(\sim C \vee B)$	
$n+4$	$C \cdot \sim B$	$n+3$ DM, DN
$n+5$	C	
$n+6$	$\sim B \cdot C$	$n+4$ Com.
$n+7$	$\sim B$	
$n+8$	$\sim A$	$n+1, n+7$ MT
$n+9$	$C \cdot \sim A$	$n+5, n+8$ Adj.
$n+10$	$\sim(\sim C \vee A)$	$n+9$ DM, DN
$n+11$	$\sim(C \supset A)$	

এখন যথাস্থানে মানক ও গ্রাহক বসিয়ে মূল যুক্তিটির অবরোহী প্রমাণ গঠন করা যাবে অতি সহজে। বলা বাহুল্য, প্রমাণটি এ আকার ধারণ করবে।

২

1. $\sim\exists x\sim(Ax \supset Bx)$
2. $\sim Ux(Cx \supset Bx)$ $/\therefore \sim Ux(Cx \supset Dx)$
3. $Ux(Ax \supset Bx)$ 1 QE
4. $\exists x\sim(Cx \supset Bx)$ 2 QE
5. $\sim(Ca \supset Ba)$ 4 EI
6. $Aa \supset Ba$ 3 UI
7. $\sim(\sim Ca \vee Ba)$ 5 Def ⊃
8. $Ca \cdot \sim Ba$ 7 DM, DN
9. Ca
10. $\sim Ba \cdot Ca$
11. $\sim Ba$
12. $\sim Aa$ 6, 11 MT
13. $Ca \cdot \sim Aa$ 9, 12 Adj.
14. $\sim(\sim Ca \vee Aa)$ 13, DM, DN
15. $\sim(Ca \supset Aa)$
16. $\exists x\sim(Cx \supset Ax)$ 15 EG
17. $\sim Ux(Cx \supset Ax)$ 16 QE

(২) আর (২′) তুলনা করলে দেখবে, (২) আর ২′-এর মধ্যবর্তী পর্বগুলি (5—15) প্রায় অভিন্ন।

অনুশীলনী

১. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ দাও।

1. $\sim\exists xAx \quad \therefore \quad Aa \supset Ba$
2. $Ux(Dx \supset Bx),\ Ux\sim(\sim Cx \cdot Bx) \quad \therefore \quad Ux(\sim Cx \supset \sim Dx)$
3. $Ux(Ex \supset \sim Fx) \quad \therefore \quad \sim\exists x(Ex \cdot Fx)$
4. $Ux(Hx \supset \sim Dx),\ \exists x(Gx \cdot Dx) \quad \therefore \quad \exists x(Gx \cdot \sim Hx)$
5. $Ux(Gx \supset Hx),\ \exists x(Ix \cdot \sim Hx),\ Ux(\sim Jx \vee Gx) \quad \therefore\ \exists x(Ix \cdot \sim Jx)$
6. $Ux[(Kx \cdot Lx) \supset Jx],\ Ka \cdot La,\ \sim Jb \quad \therefore \quad \sim(Kb \cdot Lb)$
7. $Ux[(Lx \cdot Kx) \supset Mx],\ \exists x(Nx \cdot Kx),\ Ux(\sim Lx \supset \sim Nx)$
   $\therefore \quad \exists x(Mx \cdot Nx)$
8. $Ux[(Nx \vee Qx) \supset Ox],\ \exists y(\sim Qy \vee \sim Ny)$
   $\exists z\sim(Pz \vee \sim Qz) \quad \therefore \quad \exists wOw$
9. $Ux[Px \supset (Qx \vee Nx)],\ Ux[(Nx \vee Ox) \supset Rx]$
   $\therefore \quad Ux[(Px \cdot \sim Qx) \supset Rx]$

10. $(\exists xTx \cdot \exists xQx) \supset \exists x(Sx \vee Tx)$,
$Ux[Sx \supset (Tx \cdot Qx)]$,
$Ux(Rx \supset Sx)$,
$\exists xRx$
$\therefore \exists x(Sx \vee Tx)$

২. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ দাও।

1. $Ux[(Ax \cdot \sim Bx) \supset Cx]$, $Ux(Cx \supset Bx)$ $\therefore$ $Ux(Ax \supset Bx)$
2. $Ux\{(Bx \cdot Ax) \supset [\sim Cx \supset \sim(Ex \vee Dx)]\}$
$\therefore$ $Ux[(Ax \cdot Bx) \supset (Cx \vee \sim Dx)]$
3. $Ux\{[Dx \cdot (Ex \cdot Bx)] \supset Fx\}$, $Db \cdot \sim Fb$, Bb $\therefore \sim Eb$
4. $Ux\{[Ex \cdot (Fx \vee Hx)] \equiv Gx\}$, $\sim(Ga \vee \sim Ea)$ $\therefore$ $\sim(Fa \vee Ga)$
5. $Ux[(\sim Ix \supset \sim Ex) \supset (Fx \cdot Gx)]$
$Ux[Gx \supset (Fx \cdot Jx)]$ $\therefore$ $Ux(Ix \supset Jx)$
6. $Ux(Jx \supset Ex)$, $Ux[(Jx \cdot Ex) \supset Fx]$
$Ux\{(Ex \cdot Jx) \supset [Fx \supset (Kx \cdot Lx)\}$ $\therefore$ $Ux[Jx \supset (Kx \cdot Lx)]$
7. $Ux\{\{Lx \cdot [Kx \supset (Ox \vee Px]\} \supset \sim(Mx \cdot Nx)\}$
$\therefore$ $Ux\{[Lx \cdot (Mx \cdot Nx)] \supset \sim(Ox \vee Px)\}$
8. $Ux(Nx \vee Ox) \supset Ux(Px \supset Qx)$, $\exists x(Nx \cdot Px)$ $\therefore$ $\exists xQx$
9. $Ux[Rx \supset (Qx \supset Sx)]$, $\exists x[(Qx \cdot Rx) \cdot Tx]$
$\therefore$ $\exists x[(Rx \cdot Sx) \cdot Tx]$
10. $Ux[(Rx \vee Vx) \supset Sx]$, $Ux[(Sx \vee Ux) \supset Tx]$, $\exists x \sim Tx$
$\therefore$ $\exists x \sim (Ux \vee Vx)$
11. $\exists x[Wx \cdot \sim(Zx \vee Yx)]$
$Ux[(Wx \vee Ux) \supset \sim Vx]$
$Ux[\sim(Vx \vee Yx) \supset Xx]$
$\therefore \exists x[(Wx \cdot Xx) \cdot \sim(Yx \vee Zx)]$

৩. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ দাও।

1. $Ux[(Bx \vee Gx) \supset Fx]$ $Ux[(Fx \vee Vx) \supset Nx]$
$\therefore$ $Ux(Bx \supset Nx)$
2. $Ux[Cx \supset (Fx \vee Kx]$, $Ux(Fx \supset Nx)$,
$\exists x(Cx \cdot \sim Nx)$ $\therefore$ $\exists x(Cx \cdot Kx)$
3. $Ux[Bx \vee Vx) \supset (Ox \cdot Dx)]$ $\therefore$ $Ux(Bx \supset Dx)$
4. $Ux[(Hx \cdot Bx) \supset (Wx \cdot Cx)]$
$Ux[(Hx \cdot Ex) \supset Bx]$, $\therefore$ $Ux[(Hx \cdot Ex) \supset Wx]$
5. $Ux(Px \supset Lx)$, $Ux[(Lx \cdot Px) \supset Sx]$ $\therefore$ $Ux[Px \supset (Lx \cdot Sx)]$
6. $Ux(Dx \supset Sx)$, $\exists x(Dx \cdot Ex)$
$Ux[(Ex \cdot Sx) \supset Ox]$ $\therefore$ $\exists x(Dx \cdot Ox)$

7. $\mathrm{U}x[(Dx \vee Lx) \supset Cx], \mathrm{U}x(Ax \supset Ix)$
$\exists x(Lx \cdot \sim Ix), \exists x(Dx \cdot Ax)$
$\therefore \exists x(Cx \cdot Ix)$

8. $\mathrm{U}x\{(Bx \vee Wx) \supset [(Ax \vee Fx) \supset Sx]\}$
$\therefore \mathrm{U}x[Bx \supset (Ax \supset Sx)]$

9. $\mathrm{U}x[Ax \supset (Sx \equiv Wx)], \mathrm{U}x(Ax \supset Ix)$
$\exists x[(Ax \cdot Sx) \cdot \sim Wx]$
$\therefore \mathrm{U}x(Ix \supset Ax)$

10. $\mathrm{U}x[Px \supset (Fx \vee Tx)], \mathrm{U}x[Px \supset (Tx \equiv \sim Wx)]$
$\exists x(Px \cdot Wx), \exists x(Px \cdot \sim Wx)$
$\therefore \exists x(Px \cdot Tx)$

11. $\mathrm{U}x[Mx \supset (Ox \cdot Gx)], \mathrm{U}x(Ox \supset Fx)$
$\mathrm{U}x[(Gx \vee \sim Fx) \supset Px]$,
$\mathrm{U}x[Px \supset (Fx \supset \sim Gx)], \exists x[Mx \cdot (Fx \equiv Ox)]$
$\therefore \exists x(Mx \cdot \sim Fx)$

12. $\mathrm{U}x[(Wx \vee Tx) \supset Hx], \mathrm{U}x[(Hx \vee Lx) \supset Dx]$
$\mathrm{U}x[Dx \supset (Gx \cdot Ux)], \exists x[Wx \cdot (\sim Gx \cdot \sim Sx)]$
$\therefore \exists x[Tx \cdot (Sx \cdot \sim Gx)]$

13. $\mathrm{U}x[(Mx \cdot Cx) \supset (Gx \supset \sim Dx)]$,
$\mathrm{U}x[(Mx \cdot Rx) \supset Cx]$
$\mathrm{U}x[(Cx \cdot \sim Dx) \supset Ex]$
$\mathrm{U}x[(Mx \cdot Ex) \supset Gx]$
$\therefore \mathrm{U}x[(Mx \cdot Rx) \supset (Ex \equiv Gx)]$

৪. নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ দাও।

1. $\mathrm{U}x(Qx \supset Vx), \mathrm{U}x[(Vx \cdot Qx) \supset Px]$
$\therefore \mathrm{U}x[\sim Qx \vee (Vx \cdot Px)]$

2. $\mathrm{U}x[(Px \vee Rx) \supset Sx], \exists x(Px \cdot Ex)$,
$\exists x(Px \cdot Fx), \exists x(Rx \cdot \sim Sx)$
$\therefore \exists x(Ex \cdot Fx)$

3. $\mathrm{U}x(Px \supset Qx), \exists x(Sx \cdot Px), \mathrm{U}y(Sy \supset Ry)$
$\therefore \exists y(Qy \cdot Ry)$

—Guttenplan and Tamny

4. $\mathrm{U}x[(Sx \vee Gx) \supset Vx], \exists x(Ix \cdot Gx)$,
$\exists x(Sx \cdot Px), \mathrm{U}x(Vx \supset \sim Ix) \quad \therefore \exists x(Sx \cdot Fx)$

5. $\mathrm{U}x[Wx \supset (Nx \vee Fx)], \mathrm{U}x[(Wx \cdot Nx) \supset \sim Fx]$
$\exists x(Wx \cdot Fx) \quad \therefore \exists x(Wx \cdot \sim Nx)$

6. $\mathrm{U}x[(Wx \vee Hx) \supset (Px \vee Fx)], \mathrm{U}x(Fx \supset Ux)$,
$\exists x(Mx \cdot Hx), \mathrm{U}x(Mx \supset \sim Px) \quad \therefore \exists x(Mx \cdot Ux)$

7. $\forall x[(Vx \vee Wx) \supset Dx]$, $\forall x(Dx \supset Ox)$,
$\forall x(Rx \supset \sim Ox)$, $\exists x Vx$ $\therefore$ $\forall x(Wx \supset \sim Rx)$

8. $\forall x(Wx \supset Ax)$, $\forall x[Ax \supset (Ux \cdot Ix)]$
$\forall x(\sim Ix \supset Rx)$, $\forall x(Ux \supset Dx) \cdot$
$\forall x(\sim Wx \supset \sim Dx)$
$\therefore$ $\forall x \sim Wx$

9. $\forall x[Px \supset (Lx \vee Mx \vee Fx)]$
$\forall x(Cx \supset Px)$
$\forall x[(Cx \supset \sim(Lx \vee Mx)]$
$\therefore$ $\forall x(Cx \supset Fx)$

10. $\forall x[Tx \supset (Fx \cdot Rx)]$
$\forall x(Rx \supset Ox)$
$\exists x(Tx \cdot \sim Vx)$
$\forall x[Fx \supset (Vx \vee Ix)]$
$\forall x[Ox \supset (Px \vee Vx)]$
$\therefore$ $\exists x(Px \cdot Ix)$

11. $\forall x[Vx \supset (Cx \cdot Fx)]$
$\forall x[Fx \supset (Ox \cdot Ax \cdot Bx)]$
$\forall x[Vx \supset \sim(Ox \vee Ax)]$
$\forall x(Bx \supset Kx)$
$\forall x(Vx \supset \sim Kx)$
$\therefore$ $\forall x \sim Vx$

—O'Connor & Powell

৫. নিম্নলিখিত যুক্তিগুলির বৈধতার অবরোহী প্রমাণ দাও।

1. No beauty queens are unattractive. There are not any attractive gangsters. So beauty queens are never gangsters. (Qx, Ax, Gx)
2. All beautiful things are desirable. Nothing desirable has scales. Mermaids have scales. So beautiful mermaids always lure sailors to their doom. (Bx, Dx, Sx, Nx, Kx)
3. Philosophers are stuffy woolgatherers. Metaphysicians are not stuffy if they are logicians. Some philosophers are careful thinkers if and only if they are logicians. Only metaphysicians are either stuffy or unintelligible. So not all philosophers are logicians. (Px, Sx, Wx, Mx, Ln, Cx, Ix)

—Leblanc & Wisdom

4. If someone took the test, then Jack will work tonight. Anyone who works tonight will sleep late tomorrow. Alice took the test. So someone will work tonight and sleep late tomorrow,

5. Lions are dangerous animals. Some lions are tame. Therefore dangerous animals exist.

—Resnik

6. If anyone is victorious, he is well-trained. If anyone is well-trained he is determined. No one is both determined and undecided. Therefore, if anyone is victorious, he is decided.

7. All students are hard workers. Some students are intelligent. All those that are hard workers and intelligent are successful and likeable. Therefore, some of those that are successful are likeable.

—Guttenplan & Tamny

8. Bees and wasps sting if they are either angry or frightened. Therefore any bee stings if it is angry. (*Bx*, *Wx*, *Sx*, *Ax*, *Fx*)

9. Any author is successful if and only if he is well read. All authors are intellectuals. Some authors are successful but not well read. Therefore all intellectuals are authors. (*Ax*, *Sx*, *Wx*, *Ix*)

10. All members are both officers and gentlemen. All officers are fighters. Only a pacifist is either a gentlemen or not a fighter. No pacifists are gentlemen if they are fighters. Some members are fighters if and only if they are officers. Therefore not all members are fighters. (*Mx*, *Ox*, *Gx*, *Fx*, *Px*)

11. Wolfhounds and terriers are hunting dogs. Hunting dogs and lap dogs are domesticated animals. Domesticated animals are gentle and useful. Some wolfhounds are neither gentle nor small. Therefore some terriers are small but not gentle. (*Wx*, *Tx*, *Hx*, *Lx*, *Dx*, *Gx*, *Ux*, *Sx*)

—Copi

৮

UG ও EI-এর ন্যায্যতা

১. ভূমিকা

নিম্নোক্ত যুক্তিগুলি লক্ষ কর।

(1)

Everybody is fallible

∴ Aristotle is fallible

(2)

Aristotle is fallible

∴ Somebody is fallible

(3)

Aristotle is fallible

∴ Everybody is fallible

(4)

Somebody is fallible

∴ Aristotle is fallible

যার যুক্তিবিজ্ঞানে হাতেখড়ি হয় নি সেও সহজবুদ্ধিতে এ সহজ কথাটা বুঝবে যে: (1) (2) আর এ ধরনের যুক্তি বৈধ; (3) (4) আর এ ধরনের যুক্তি অবৈধ। এ কথাটা আমরা এভাবে বলতে পারি:

(1)UI

$UxFx$

$\therefore\ Fa$

(3)UG

Fa

$\therefore\ UxFx$

(2)EG

Fa

$\therefore\ \exists xFx$

(4)EI

$\exists xFx$

$\therefore\ Fa$

-এ আকারগুলির মধ্যে (1) আর (2) বৈধ, কিন্তু (3) আর (4) অবৈধ।

(1) আর (2)-এর বৈধতা স্বতবোধ্য। আর আমরা দেখেছি যে

UI হল Simp. বিধির এক বিশেষ রূপ,

EG হল Add. বিধির এক বিশেষ রূপ।

কাজেই UI আর EG-এর ন্যায্যতা সম্পর্কে কোনো সংশয় হওয়ার কথা নয়। কিন্তু UG আর EI ?

আমরা যেসব "নিষিদ্ধ"-এর কথা বলেছি সেসব নিষিদ্ধ উল্লেখ করে দেখানো যায় (3) আর (4) অবৈধ। যায়, এভাবে—

(3′)	1. Fa	/∴ $UxFx$
	2. $UxFx$	1 UG

এ অবরোহে Fa বা a-এর ভিত্তিতে সার্বিকীকরণ (সার্বিকমানকিতকরণ) করা হয়েছে।

কিন্তু *Fa* যে মূল হেতুবাক্যের ওপর নির্ভর করে তাতে আছে *a*। সুতরাং *Fa* বা *a*-এর ভিত্তিতে সার্বিকীকরণ করা চলবে না (পৃঃ ৯৮, 'নিষিদ্ধ ২' দেখ)। কিন্তু এ নিষিদ্ধ অগ্রাহ্য করে এখানে সার্বিকীকরণ করা হয়েছে। কাজেই এ অবরোহ অবৈধ।

(4′)	1. $\exists xFx$	/∴ Fa
	2. Fa	1 EI

এ অবরোহের সিদ্ধান্তে আছে *a*। সুতরাং এ *a* দিয়ে $\exists xFx$-এর দৃষ্টান্তীকরণ করা চলবে না (পৃঃ ৯৮, 'নিষিদ্ধ ১' দেখ)। কিন্তু এ নিষিদ্ধটি অগ্রাহ্য করে এখানে দৃষ্টান্তীকরণ করা হয়েছে। কাজেই এ অবরোহ অবৈধ।

উক্তরূপ অবরোহ বারণের জন্য আমরা নিষিদ্ধ উল্লেখ করেছি, এটা ঠিক। কিন্তু এটাও ঠিক যে, আমরা UG আর EI বিধি মেনে নিয়েছি ; এবং তোমাদের এই বলে আশ্বস্ত করেছি যে—'নিষিদ্ধ' মেনে চললে UG আর EI প্রয়োগেতে অন্যায্য কিছু নেই। কিন্তু আমার আশঙ্কা, এদের ন্যায্যতা সম্পর্কে সংশয় দূর করতে পারি নি। এ অধ্যায়ের লক্ষ্য, এ সংশয় দূর করা, UG আর EI-এর ন্যায্যতা দেখানো।

২. UG-এর ন্যায্যতা

কোনো অবরোহে

$n \cdot Fa$	
$n+1 \cdot UxFx$	n UG

এরকম দুটি ছত্র যোগ করে এ উদ্ভট দাবী করা হয় না যে : কোনো বিশেষ ব্যক্তি *F* সুতরাং সর্বকিছু *F*, যেমন সক্রেটিস জ্ঞানী (*Ws*) সুতরাং সবাই জ্ঞানী ($UxWx$)। আসলে এরকম ক্ষেত্রে '*Fa*'-এর '*a*' কোনো বিশেষ ব্যক্তি বোঝায় না, বোঝায় প্রতিভূ ব্যক্তি* (প্রতিভূ দৃষ্টান্ত)। প্রশ্ন হল প্রতিভূ ব্যক্তি, সংক্ষেপে প্রতিভূ, কী ?

প্রতিভূর কথা তোমাদের কাছে সম্পূর্ণ অভিনব মনে হওয়ার কথা নয়। কেননা তোমরা সবাই স্কুলপাঠ্য জ্যামিতি পড়েছ। আর নিশ্চয়ই বুঝতে পারছ যে, জ্যামিতিতে আমরা সার্বিক সত্য প্রমাণ করি প্রতিভূ (জ্যামিতিক) আকার দিয়ে। একটা উদাহরণ।

মনে কর, প্রমাণ করতে হবে যে—সব ত্রিভুজে অমুক ধর্ম আছে—যেমন, সব ত্রিভুজের তিনকোণের যোগফল দু সমকোণ। এ রকম ক্ষেত্রে আমরা সুরু করি এই বলে : Let ABC be a triangle, মনে কর, কখগ একটা ত্রিভুজ। এখানে ABC (বা কখগ) কী ? নিশ্চয়ই কোনো বিশেষ ত্রিভুজ, আমার-আঁকা ত্রিভুজ বা তোমার-আঁকা ত্রিভুজ নয়। তা যদি হত তাহলে ব্যক্তি ত্রিভুজের ধর্মের ওপর নির্ভর করে (সব) ত্রিভুজ সম্পর্কে কোনো সার্বিক সিদ্ধান্ত প্রমাণ করা যেত না। রাম মোটা—এ বাক্য থেকে নিঃসৃত হয় না যে : সবাই মোটা। সেরকম, এ ত্রিভুজটার প্রত্যেকটি বাহু দু ইঞ্চি করে

---

* প্রতিভূ (ব্যক্তি) = arbitrarily *selected* individual

লম্বা—এ বাক্য থেকে নিঃসৃত হয় না যে : সব ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু দু ইঞ্চি করে লম্বা। আসলে এখানে ABC হল ত্রিভুজের প্রতিভূ—প্রতিনিধি দৃষ্টান্ত।

ত্রিভুজ সংক্রান্ত উক্ত উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে গিয়ে আমরা ত্রিভুজের একটা প্রতিনিধি নিই। আমরা এ ত্রিভুজ, ঐ ত্রিভুজ, ABC, DEF না নিয়ে যেকোনো ত্রিভুজ প্রতিনিধি হিসাবে নিতে পারি। এখন যদি দেখাই যে এ প্রতিভূতে অমুক ধর্ম, *F*, আছে তাহলে প্রমাণিত হয় যে সব ত্রিভুজে *F* ধর্ম আছে। যুক্তিবৈজ্ঞানিক অবরোহে আমরা ঠিক এ কৌশল অবলম্বন করি : কোনো প্রতিভূ *a* নিয়ে প্রথমে প্রমাণ করি, প্রতিভূটিতে কোনো ধর্ম *F* আছে, তারপর UG প্রয়োগ করে দাবী করি : *a* যে ব্যক্তিগুলির প্রতিভূ তাদের প্রত্যেকটিতে *F* আছে।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে : UG প্রয়োগ—*Fa*-এর ভিত্তিতে *UxFx*-এতে আসা—নির্দোষ বলে গণ্য হতে পারে যদি *a*, মানে যে ব্যক্তিকে প্রতিভূ হিসাবে নেওয়া হয়েছে সে ব্যক্তি (মানে, U*x*-বদ্ধ বাক্যের দৃষ্টান্তীকরণ করতে যে ব্যক্তির নাম প্রয়োগ করা হয় সে ব্যক্তি), প্রকৃতই প্রতিভূ হয়। আর এটা সহজবোধ্য যে

> কোনো অবরোহ প্রসঙ্গে কোনো ব্যক্তি প্রতিভূ হিসাবে গণ্য হতে পারে, যদি এমন হয় যে : ঐ ব্যক্তি সম্পর্কে ঐ অবরোহে এমন কোনো তথ্য উল্লেখ করা হয় না যা ঐ-ব্যক্তি-যাদের-প্রতিভূ-তাদের সম্পর্কে খাটে না।

৩. EI-এর ন্যায্যতা (১)

EI-এর ন্যায্যতা দেখানো সহজ নয়। নিচে দুভাবে এর ন্যায্যতা দেখাবার চেষ্টা করলাম।

EI-প্রসঙ্গে "নিষিদ্ধ" আলোচনা করতে গিয়ে বলা হয়েছে : সিদ্ধান্তে যে নাম আছে (ধর, *a* আছে) EI-এর সাহায্যে দৃষ্টান্ত দিতে গিয়ে সে নামটি (*a*) ব্যবহার করা চলবে না। এ নিষিদ্ধ থেকে বোঝা যায় : যে অবরোহে EI প্রয়োগ করা হয়েছে (ধর, *a* দিয়ে) সে অবরোহের সর্বশেষ ছত্র কখনও ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য (ধর, *Fa*, *Ha*, *Ga* ইত্যাদি) হবে না। কথাটা এভাবেও বলা যেত : $\exists xFx$ থেকে চরম সিদ্ধান্ত হিসাবে *Fa* (*Fb* ইত্যাদি) নিষ্কাশন করা যাবে না। তবে দেখা যাবে, কোনো মধ্যবর্তী পর্বে

n. $\exists xFx$

$n+1$. Fa n EI

এরকম দুটি ছত্র থাকতে পারে। কিন্তু এরকম ক্ষেত্রে বলা হয় না : কোনো এক বা একাধিক ব্যক্তিতে *F* আছে, সুতরাং *a* নামক ব্যক্তিতে *F* আছে। যদি হত, তাহলে EI প্রয়োগ করে *Fa*, *Fb* [$\exists xGx$ থেকে *Ga*, *Gb*] ইত্যাদি ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য চরম সিদ্ধান্ত হিসাবে প্রতিষ্ঠা করা যেত। তাহলে উক্তরূপ অবরোহে EI-এর সাহায্যে নিষ্কাশিত বাক্যে কী বলা হয় ?

একটা উদাহরণ। মনে কর, $Fx = x$ হল দার্শনিক, s = Socrates। এখানে

$\exists xFx$ থেকে Fs বৈধভাবে নিষ্কাশন করা যায় না। হেতুবাক্যে বলা হয়েছে: দার্শনিক আছে, অন্তত এক ব্যক্তি দার্শনিক। বলা বাহুল্য, এর থেকে এ সিদ্ধান্ত নিঃসৃত হয় না যে—সক্রেটিস দার্শনিক। কোন্ বা কোন্ কোন্ ব্যক্তিতে F আছে তা আমাদের জানা নেই। কিন্তু যে ব্যক্তিতে F আছে তার সম্বন্ধে উক্তি করতে হলে তাকে কোনো নামে চিহ্নিত করা সুবিধাজনক। এবং যেহেতু যে ব্যক্তিতে F আছে তাকে a নামে চিহ্নিত করতে কোনো বাধা নেই (ধর, বাধা নেই), আমরা বলতে পারি:

> যে ব্যক্তিতে F আছে সে যেই হোক না কেন, ধর তার নাম a। আর তাহলে বলতে পারি: Fa

বস্তুত EI প্রয়োগ করে এ রকম কথাই বলা হয়। EI প্রয়োগের উদাহরণটি নিয়ে এর হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তের বক্তব্য নিচে সাধারণ ভাষায় বলা হল।

$n \cdot \exists xFx$		[অন্তত এক ব্যক্তিতে F আছে]
$n+1 \cdot Fa$	n EI	[যে ব্যক্তিতে F আছে তাকে a বলে উল্লেখ করা হবে, কাজেই বলা যায়: Fa]

যে ব্যক্তিতে F আছে এ অবরোহে তাকে a নামে চিহ্নিত করা হয়েছে, তবে অন্য যেকোনো কল্পিত বা বানানো নামে—b, c, d ইত্যাদি নামেও—একে চিহ্নিত করা যেত। কেননা যেকোনো অজ্ঞাত ব্যক্তিকে যেকোনো বানানো নামে চিহ্নিত করার স্বাধীনতা আমাদের আছে।

তুমি আপত্তি তুলে বলতে পার: তাই যদি হবে তাহলে এ কথাও মানতে হবে যে

> There are philosophers (F) $\therefore$ Socrates(s) is a philosopher

এ যুক্তিও বৈধ। বলতে পার: কেননা যে ব্যক্তিতে F আছে তাকে আমি s (সক্রেটিস) নামেও চিহ্নিত করতে পারি। আর যে ব্যক্তিতে F আছে তার বানানো নাম s দিলে উক্ত যুক্তিটি অবশ্যই বৈধ।

এ আপত্তির উত্তরে বলব: আমরা জানি, সক্রেটিস এক বিশেষ ব্যক্তির নাম। কাজেই জেনে শুনে, এ নামটিকে বানানো নাম হিসাবে ব্যবহার করব কেন? যে ব্যক্তিতে F আছে সে অজ্ঞাত ব্যক্তিকে "সক্রেটিস" নামে চিহ্নিত করব কেন? ধরা যাক, তুমি জেদ করে বললে: আমার খুশি, ঐ অজ্ঞাত ব্যক্তিকে আমি s নামেই চিহ্নিত করব। এর উত্তরে আমরা বলব: সক্রেটিস সংক্রান্ত উক্ত যুক্তিটি কিন্তু অবৈধ। কেন অবৈধ, দেখ।

1. $\exists xFx$	$/\therefore Fs$	[এখানে $Fs = s$ হল F]
2. Fs	1 EI	[এখানে Fs—যে ব্যক্তি F তার নামকরণ করা হল s, কাজেই বলা যায় Fs]

এখানে 2 আর প্রদত্ত সিদ্ধান্ত (উপপাদ্য) Fs অভিন্ন নয়। প্রদত্ত সিদ্ধান্ত হল: s হল F, দার্শনিক। আর অবরোহিত 2-এতে বলা হয়েছে: যে ব্যক্তি F তার নামকরণ করা হল সক্রেটিস, কাজেই বলা যায় সে অজ্ঞাত ব্যক্তিটি F। তোমায় প্রমাণ করতে বলা হল: সক্রেটিস দার্শনিক—এ বাক্য। আর উক্ত অবরোহে তুমি EI-এর সাহায্যে প্রমাণ

করলে এ বাক্যটি : যে ব্যক্তি দার্শনিক তার বানানো নাম হিসাবে সক্রেটিস দিলে বলতে হয়—ঐ অজ্ঞাত লোকটি (যাকে সক্রেটিস বলে উল্লেখ করব বলে স্থির করেছি) দার্শনিক। কিন্তু নিম্নোক্ত বাক্য দুটির পার্থক্য অগ্রাহ্য করলে চলবে না :

a নামক ব্যক্তিতে F আছে

যে ব্যক্তিতে F আছে তার নাম দেওয়া হল a, কাজেই : Fa

লক্ষণীয় EI প্রয়োগ করে $\exists xFx$ থেকে যে Fa পাই সে Fa-এর a কোনো বিশেষ ব্যক্তির নাম নয়, প্রতিভূ নাম। কথাটা আরও একটু বিশদভাবে বলি।

ধর, কোনো অসম্পূর্ণ অবরোহের কোনো ছত্রে আছে $\exists xFx$। এ ছত্রের বক্তব্য : অন্তত এক ব্যক্তি F, হতে পারে অসংখ্য ব্যক্তি F। এ অনির্দিষ্ট তথ্যের ভিত্তিতে সিদ্ধান্তের দিকে আর এগুনো যায় না। এ রকম ক্ষেত্রে আমরা একটা কৌশল অবলম্বন করি। $\exists xFx$-এর x যে অনামিত ব্যক্তি বা ব্যক্তিগুলি বোঝায় সে ব্যক্তি বা ঐ ব্যক্তিগুলির কোনো একটি সম্পর্কে বলি : ধর, ঐ ব্যক্তির নাম a। লক্ষণীয়, এ নামটি কোনো ব্যক্তি বিশেষের নাম নয়—b, c, d বা s (Socrates), p (Plato)-এর মত স্বীয় নাম* নয়। এ নাম হল কল্পিত নাম, বানানো নাম বা প্রতিভূ নাম**। কাজেই $\exists xFx$-এর পরবর্তী কোনো ছত্রে Fa লিখলে কার্যত বলা হয় : মনে করা যাক, যে ব্যক্তি F তার নাম a, মনে করা যাক Fa। এর মানে দাড়াল, Fa একটা প্রকল্প। এখন বলতে পারি, প্রকল্প বলেই চরম সিদ্ধান্তে EI-এর সাহায্যে নিষ্কাশিত Fa, Ga, $Fa \cdot Ga$ ইত্যাদির স্থান নেই। এ রকম প্রকল্পের সাহায্য নিয়ে আমরা চরম সিদ্ধান্ত হিসাবে প্রতিষ্ঠা করি দুর্বলতর বাক্য : $\exists xGx$, $\exists x(Fx \cdot Gx)$ ইত্যাদি বাক্য, যাতে কোনো বিশেষ ব্যক্তির, এমনকি কোনো প্রতিভূর নামও থাকে না। এজন্য কেউ কেউ বলেন, EI বিধি যুক্তিবিধি† নয়, EI হল কৌশল সংক্রান্ত বিধি‡।

(প্রতিভূ নামের সাহায্য নিয়ে) একটা কৌশল অবলম্বন করার কথা বলা হল। প্রতিভূর কথা UG-এর ন্যায্যতা প্রসঙ্গেও বলা হয়েছে। দৈনন্দিন জীবনেও আমরা অনেক সময় প্রতিভূ নাম প্রয়োগ করি এবং EI-এর সাহায্য নিয়ে সিদ্ধান্ত প্রতিষ্ঠা করি।

উদাহরণ

অনেক সময় আমরা নিম্নোক্তরূপ বিচার বিবেচনা করি। কেউ প্রেসিডেন্ট সালামকে খুন করেছে। কে খুন করেছে জানা যায় নি। যে লোকটা খুন করেছে ধর তার নাম

* proper name

** arbitrary name, এ রকম নামকে ambiguous name বা pseudo-name-ও বলা হয়।

† rule of inference

‡ rule of procedure

জন ডো* । এখন, জন ডো নিশ্চয়ই বুশ বিদ্বেষী, কেননা, বুশরাই সালামকে গদীতে বসিয়েছিল ; তার নিরাপত্তার জন্য লক্ষ লক্ষ টাকা খরচ করেছিল । শুধু তাই নয় । এটা মনে করার সঙ্গত কারণ আছে যে, জন ডো মার্কিনদের খুব অনুগত, কেননা মার্কিনরা সালামকে পছন্দ করত না, এবং সালাম অপসারিত হওয়ার ফলে মার্কিনদের সুবিধা হল । তারপর, এটাও নিশ্চিত যে, জন ডো CIA-এর সাহায্য পেয়েছিল, কেননা অতীতে CIA এ রকম মার্কিন বিরোধী রাষ্ট্রপ্রধানদের হত্যার ব্যাপারে সাহায্য করেছে । সুতরাং আমরা এ সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে : এমন কেউ সালামকে খুন করেছে যে বুশ বিদ্বেষী, মার্কিনদের অনুগত ও CIA-সাহায্যপুষ্ট ।

লক্ষণীয়, এ যুক্তির মূল হেতুবাক্যে বা সিদ্ধান্তে কোথাও জন-ডোর নাম নেই । অথচ সালামের হত্যাকারীর (সে যেই হোক) নাম জন ডো—এ কথা ধরে নিলে আলোচনার সুবিধা হয় । বলা বাহুল্য, এখানে "জন ডো" একটা প্রতিভূ নাম ।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে : EI-এর প্রয়োগ, যেমন $\exists xFx$-এর থেকে Fa অবরোহণ করা, নির্দোষ বলে গণ্য হতে পারে—

> যদি a, মানে যে নাম দিয়ে $\exists x$-বদ্ধ বাক্যের দৃষ্টান্তীকরণ করা হয় সে নামটি, প্রতিভূ নাম হয় ।

কিন্তু কোনো নাম প্রতিভূ নাম কিনা তা নির্ণয় করব কি করে ? প্রতিভূ নামের লক্ষণ কী ?

প্রথমে দেখা যাক, কোন্ নাম প্রতিভূ নাম বলে গণ্য হতে পারে না ।

> যদি কোনো অবরোহে a কোনো বিশেষ ব্যক্তির নাম (proper name) হিসাবে ব্যবহৃত হয়ে থাকে, তাহলে সে অবরোহে a প্রতিভূ নাম বলে গণ্য হতে পারে না । এবং যদি কোনো অবরোহের কোনো পর্বে বলা হয় যে a ব্যক্তিতে F আছে, অথবা যে ব্যক্তিতে F আছে তার প্রতিভূ নাম হল a, তাহলে সে অবরোহে, a যে-ব্যক্তিতে-অন্য-ধর্ম-G-আছে তার প্রতিভূ নাম বলে গণ্য হতে পারে না ।

কথাটা এভাবেও বলা যেত :

> কোনো অবরোহ প্রসঙ্গে কোনো নাম, a, প্রতিভূ নাম হিসাবে গণ্য হতে পারে, যদি এমন হয় যে—যেখানে, নিষিদ্ধ নাম ছাড়া, অন্য যে কোনো নাম ব্যবহার করা যেত সেখানেই এ নাম, a, ব্যবহার করা যায় ।

এখন বলতে পারি, বস্তুত EI নিষিদ্ধগুলির লক্ষ্য হল প্রতিভূ নাম নির্ধারণ । নিষিদ্ধগুলি লঙ্ঘন করে যদি কোনো নাম নির্বাচন কর, তাহলে সে নাম প্রতিভূ বলে গণ্য হবে না ।

EI-এর নিষিদ্ধ প্রসঙ্গে যে ভ্রান্ত অবরোহগুলি উল্লেখ করা হয়েছিল সেগুলি পুনর্বিবেচনা করা যাক ।

* John Doe — a fictitious name used in law courts, legal papers etc. for that of a person who is not known.

—Webster's New World Dictionary

[পৃঃ ৭৩ উদাহরণ ১]

1. $\exists x(Ix \cdot Px)$ $/\therefore\ Is \cdot Ps$
2. $Is \cdot Ps$ 1 EI

এখানে 2-এর *s* প্রতিভূ নাম নয়। কেননা এ অবরোহে *s* ব্যক্তিনাম হিসাবে ব্যবহৃত হয়েছে (সিদ্ধান্ত দ্রষ্টব্য)। অথবা বলতে পারি *s* প্রতিভূ নাম নয়, কেননা $Ix \cdot Px$-এতে *x*-এর জায়গায় যে কোনো নাম বসতে পারত না, যেমন *s* পারত না। কেননা $Ix \cdot Px$-এতে *s* বসানো যুক্তিসঙ্গত কিনা তাই এখানে বিচার্য। তবে এ ক্ষেত্রে অন্য প্রকল্প যথা, $Ia \cdot Pa$, গঠন করা যেত, মানে—*a*-কে প্রতিভূ নাম হিসাবে ব্যবহার করা যেত।

[পৃঃ ৭৪ উদাহরণ ২.১]

1. $\exists x Mx$
2. Sg $/\therefore\ \exists x(Mx \cdot Sx)$
3. $\sim\exists x(Mx \cdot Sx)$ ~Con
4. Mg 1 EI

....

এখানে 4-এর *g* প্রতিভূ নাম নয়, কেননা *g* এখানে ব্যক্তিনাম হিসাবে ব্যবহৃত হয়েছে। অথবা বলতে পারি, *g* প্রতিভূ নাম নয়, কেননা *Mx*-এতে *x*-এর বদলে যে কোনো নাম বসতে পারত না ; যথা, *g* বসতে পারত না। কেননা যেসব ব্যক্তিতে *M* আছে, *g* তাদের প্রতিভূ নাম হতে পারে না। কেননা, 2-এতে বলা হয়েছে *g* ব্যক্তিতে বিরুদ্ধ ধর্ম *S* বর্তমান। তবে এখানে *a, b, c, d* ইত্যাদির যে কোনোটিকে *M* শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত ব্যক্তির প্রতিভূ নাম হিসাবে নেওয়া যেত।

[পৃঃ ৭৪ উদাহরণ ২.২]

1. $\exists x(Px \cdot \sim Hx)$ $\sim/\therefore\ \sim\exists x(Px \cdot Hx)$
2. $\exists x(Px \cdot Hx)$ ~Con
3. $Pa \cdot \sim Ha$ 1 EI
4. $Pa \cdot Ha$ 2 EI

এখানে 3-এতে *a* প্রতিভূ নাম হিসাবে ব্যবহৃত হয়েছে। এ ছত্রে বলা হয়েছে : ধর যেসব রাজনীতিবিদ্ অসাধু ($\sim H$) তাদের কোনো একজনের নাম হল *a*। কাজেই 4-এতে *a* আর প্রতিভূ নাম হিসাবে ব্যবহৃত হতে পারে না। এটা সহজবোধ্য যে, যে-ব্যক্তিতে $\sim H$ আছে তার (প্রতিভূ) নাম যদি *a* রাখা হয় তাহলে যে ব্যক্তিতে *H* আছে (4 দ্রষ্টব্য) তার নাম হিসাবে *a* রাখা চলবে না। কাজেই ছত্র 4-এতে EI-এর অপপ্রয়োগ হয়েছে।

৪. EI-এর ন্যায্যতা (২) : EI ও CP

EI-এর ন্যায্যতা সমর্থন করতে গিয়ে অনেক কথা বলা হল। এখন আর একভাবে EI-এর ন্যায্যতা দেখাতে যাচ্ছি। তার ভূমিকা হিসাবে বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের একটা বৈধ আকার উল্লেখ করব।

$$(A \vee B) \supset Q$$
$$A \vee B$$
$$\therefore\ Q$$

এটি MP-এর নিবেশন দৃষ্টান্ত, সুতরাং বৈধ।

এখন

$$(A \vee B) \supset Q \quad \text{সম} \quad (A \supset Q) \cdot (B \supset Q)$$

কাজেই উক্ত যুক্তি-আকারটি এভাবে (দ্বিকল্প ন্যায়ের আকারে) ব্যক্ত করতে পারি।

$$(A \supset Q) \cdot (B \supset Q)$$
$$A \vee B$$
$$\therefore \ Q$$

এ আকারটি লক্ষ করলে বোঝা যাবে :

যদি

A থেকে Q নিষ্কাশন করা যায়, আবার
B থেকে Q নিষ্কাশন করা যায়

তাহলে

$A \vee B$ দেওয়া থাকলে, সিদ্ধান্ত করা যায় যে Q সত্য।

ধর, $A \vee B$ দেওয়া আছে। আমাদের Q প্রমাণ করতে হবে। তাহলে আমরা এভাবে Q-এর প্রমাণ দিতে পারি :

A-কে প্রকল্প হিসাবে নিয়ে Q নিষ্কাশন করলাম
B-কে প্রকল্প হিসাবে নিয়ে Q নিষ্কাশন করলাম
তারপর উক্ত যুক্তি-আকারের বলে দাবী করলাম
: Q সত্য।

এখন, আমরা জানি, $\exists x$-বদ্ধ বাক্য হল অসীমিত বৈকল্পিক ; যথা

$$\exists xFx$$

-এর বক্তব্য হল

$$Fa \vee Fb \vee Fc \vee Fd \vee Fe \vee \cdots\cdots$$

একটা কৃত্রিম বিশ্ব কল্পনা কর, যে বিশ্বে আছে কেবল দুটি ব্যক্তি a আর b। এ বিশ্বের বেলায়

$$\exists xFx \qquad (1)$$

এ উক্তি করলে বলা হয়

$$Fa \vee Fb \qquad (2)$$

এক্ষেত্রে (1) আর (2) সমার্থক।* এখন, Fa-কে প্রকল্প হিসাবে নিয়ে যদি দেখাতে পারি : Fa থেকে Q [যথা, $\exists xGx$] নিষ্কাশন করা যায়, আবার প্রকল্প Fb থেকেও Q নিষ্কাশন করা যায়, তাহলে দাবী করা যাবে—Q সত্য।

---

* সেরূপ $\exists xGx$—এ উক্তি করলে বলা হয় : $Ga \vee Gb$

নিম্নোক্ত যুক্তিটি লক্ষ কর।

1. $Ux(Fx \supset Gx)$

2. $\exists xFx \quad \therefore \exists xGx$

মনে করা যাক, বিশ্বে কেবল দুটি ব্যক্তি আছে, a আর b। তাহলে 2-এর বদলে লেখা যায় এর সমার্থক : $Fa \vee Fb$, এবং তাহলে প্রদত্ত হেতুবাক্য থেকে $\exists xGx$ নিষ্কাশন করা যায় এভাবে :

1. $Ux(Fx \supset Gx)$
2. $\exists xFx \quad /\therefore \exists xGx$
3. $Fa \vee Fb$ 2 Equiv.

4.	Fa [প্রকল্প]		4′.	Fb [প্রকল্প]	
5.	$Fa \supset Ga$	1 UI	5′.	$Fb \supset Gb$	I UI
6.	Ga	5,4 MP	6′.	Gb	5′,4′ MP
7.	$Ga \vee Gb$	6 Add.	7′.	$Ga \vee Gb$	6′ Add., Com.

8. $\exists xGx$
7,7′ Equiv.

আমরা একটা কৃত্রিম বিশ্ব কল্পনা করেছি যেখানে কেবল দুটি ব্যক্তি—a আর b। সে বিশ্বে $\exists xFx$ আর $Fa \vee Fb$ সমার্থক, $\exists xGx$ আর $Ga \vee Gb$ সমার্থক। কিন্তু বস্তুত $\exists xFx$, $\exists xGx$ এসব অসীমিত বৈকল্পিক। যথা

$\exists xFx$

-এর বক্তব্য হল

$Fa \vee Fb \vee Fc \vee Fd \vee Fe \vee \cdots\cdots$

কাজেই বিশ্বে যদি অসংখ্য ব্যক্তি থাকে তাহলে উক্ত অবরোহের, 3-এর, এ আকার ধারণ করার কথা :

3′. $Fa \vee Fb \vee Fc \vee Fd \vee Fe \vee \cdots\cdots$ 2 Equiv.

এবং 4—7, 4′—7′-এতে যে দুটি অবরোহ খণ্ড, উক্ত অবরোহে সেরকম অসংখ্য অবরোহ খণ্ড থাকার কথা। তার মানে, উক্ত সিদ্ধান্ত* প্রমাণ করা যেত যদি (1 আর) প্রকল্প Fa থেকে $\exists xGx$, Fb থেকে $\exists xGx$, Fc থেকে থেকে $\exists xGx$, Fd থেকে $\exists xGx$—এ রকম অসংখ্য বিকল্পের† প্রত্যেকটি থেকে $\exists xGx$ নিষ্কাশন করা যেত। বলা বাহুল্য, তা সম্ভব নয়। এজন্য আমরা কোনো বিশেষ বিকল্প—Fa, Fb, Fc ইত্যাদি—না নিয়ে এদের প্রতিভূ হিসাবে একটা বিকল্প—প্রতিভূ বিকল্প—ধর Fn নিই‡। এবং দাবী করি : প্রতিভূ বিকল্প থেকে অমুক বাক্য Q, [ধর, $\exists xGx$] নিষ্কাশন করা গেছে, সুতরাং

$Fa \vee Fb \vee Fc \vee Fd \vee Fe \vee \cdots\cdots$

---

* যেখানে $\exists xFx$ একটা অসীমিত বৈকল্পিক

† বলা বাহুল্য, Fa, Fb, Fc এদের প্রত্যেকটি এক একটি বিকল্প, $Fa \vee Fb \vee Fc \vee \cdots\cdots$ -এর এক একটি অঙ্গবাক্য।

‡ যেখানে n হল প্রতিভূ নাম

এ অসীমিত বৈকল্পিকের প্রত্যেকটি বিকল্প থেকে, সুতরাং এর সমার্থক

$\exists xFx$

থেকে, ঐ Q নিষ্কাশন করা যাবে, বা যেত। পূর্বোক্ত যুক্তিটি আবার নেওয়া যাক। এখন এভাবে এর বৈধতা প্রমাণ করতে পারি।

1. $Ux(Fx \supset Gx)$
2. $\exists xFx$ $\quad /\therefore\ \exists xGx$
3. Fn প্রকল্প [$Fa \vee Fb \vee Fc \vee$......এর অন্তর্ভুক্ত বিকল্পের প্রতিভূ]
4. $Fn \supset Gn$ $\quad$ I U1
5. Gn $\quad$ 4,3 MP
6. $\exists xGx$ $\quad$ 5 EG

ছত্র 6-এতে প্রদত্ত সিদ্ধান্ত $\exists xGx$ পেয়েছি, ঠিক। কিন্তু এ অবরোহটি অসম্পূর্ণ ; এখানেই থামলে চলবে না। কেননা, দেখ, 6 নিষ্কাশিত হয়েছে মূল হেতুবাক্য 1 আর প্রকল্প 3 থেকে (প্রদত্ত হেতুবাক্য 1 আর 2 থেকে নয়)। লক্ষণীয়, এ অবরোহে (এখনও পর্যন্ত) কোথাও 2-কে কাজে লাগানো হয় নি। 6-এতে পৌঁছে এখন বলতে পারি : $\exists xGx$ নিঃসৃত হয়েছে প্রতিভূ প্রকল্প 3 (এবং 1) থেকে, সুতরাং দাবী করছি, $\exists xGx$ নিঃসৃত হয়েছে

$Fa \vee Fb \vee Fc \vee Fd \vee Fe \vee$............

অথবা মূল হেতুবাক্য 2 (এবং 1) থেকে। এ দাবীর কথাটা আর একটি ছত্রে বলার দরকার। বলা দরকার, সুতরাং

7. $\exists xGx$ $\quad$ 2, 3→6 EI

6 আর 7-এর পার্থক্য লক্ষ কর (ডানধারের টিপ্পনী দেখ)। 7-এর টিপ্পনীতে বলা হল 3 থেকে (1-এর সাহায্য নিয়ে) $\exists xGx$ নিষ্কাশন করা হল। লক্ষণীয় 3-এতে EI প্রয়োগ করা হয় নি ; EI প্রয়োগ করা হয়েছে সর্বশেষ ছত্রে।

EI-এর ন্যায্যতা দেখাতে গিয়ে দ্বিতীয় দফায় যা বলা হল তার থেকে একটা নতুন কথা শিখলাম। যারা এভাবে EI-এর ন্যায্যতা সমর্থন করেন তারা EI যুক্তিবিধি ব্যক্ত ব্যক্ত করেন এভাবে :

> যদি $\exists xFx$ দেওয়া থাকে এবং যদি Fa প্রতিভূ বিকল্প হয়, তাহলে Fa থেকে কোনো বাক্য Q নিষ্কাশিত হলে দাবী করা যায় $\exists xFx$ থেকেই Q নিষ্কাশিত হয়েছে (সুতরাং Q সত্য)।

পূর্বোক্ত যুক্তিটি আবার নেওয়া যাক :

$Ux(Fx \supset Gx),\ \exists xFx \quad \therefore\ \exists xGx$

প্রচলিত পদ্ধতি অনুসারে প্রমাণ করলে এ যুক্তির প্রমাণ এ রূপ ধারণ করত :

[১.১]

1.	$Ux(Fx \supset Gx)$	
2.	$\exists xFx$	$/\therefore\ \exists xGx$
3.	Fa	2 EI
4.	$Fa \supset Ga$	1 UI
5.	Ga	4,3 MP
6.	$\exists xGx$	5 EG

EI-এর ন্যায্যতা দেখাতে গিয়ে আমরা বলেছি যে এ অবরোহের আসল কথাটা হল : *Fa*-এর *a* প্রতিভূ নাম (ব্যক্তিনাম নয়), আর *Fa** প্রতিভূ বিকল্প—$\exists xFx$ যে অসীমিত বৈকল্পিকের সংক্ষিপ্ত রূপ সে বৈকল্পিকের** অন্তর্গত বিকল্পগুলির প্রতিভূ। এ প্রতিভূ নিয়ে কিভাবে উক্ত যুক্তির বৈধতা প্রমাণ দেওয়া যায় তা আগেই দেখানো হয়েছে। স্মরণীয়, ঐ অবরোহে প্রতিভূ নাম হিসাবে নিয়েছিলাম *n*। কিন্তু প্রতিভূ নাম হিসাবে *a* নিতেও কোনো বাধা নেই। *a* নিয়ে ঐ অবরোহটি আবার লেখা হল।

[১.২]

1.	$Ux(Fx \supset Gx)$	
2.	$\exists xFx$	$/\therefore\ \exists xGx$
3.	Fa	প্রকল্প
4.	$Fa \supset Ga$	1 UI
5.	Ga	4, 3 MP
6.	$\exists xGx$	5 EG
7.	$\exists xGx$	2, 3→6 EI

ছত্র 3-এর টিপ্পনী দেখে CP-এর কথা মনে হওয়ার কথা। বস্তুত CP বিধি প্রয়োগ করে উক্ত যুক্তির বৈধতা প্রমাণ এভাবে দেওয়া যায়।

[১.৩]

1.	$Ux(Fx \supset Gx)$	
2.	$\exists xFx$	
→3.	Fa	
4.	$Fa \supset Ga$	
5.	Ga	
6.	$\exists xGx$	
7.	$Fa \supset \exists xGx$	3→6 CP
8.	$Ux(Fx \supset \exists xGx)$	7 UG
9.	$\exists xFx \supset \exists xGx$	8 Equiv.
10.	$\exists xGx$	9, 2 MP

* বস্তুত প্রতিভূ নাম হিসাবে *n*, আর প্রতিভূ বিকল্প হিসাবে *Fn* ব্যবহার করা হয়েছিল।

** $Fa \vee Fb \vee Fc \vee Fd \vee$..........-এর

এখানে 9-এতে এ সমার্থতা সূত্রটি প্রয়োগ করা হয়েছে

$$\text{U}x(Fx \supset Q) \text{ সম } \exists xFx \supset Q$$

7—9 হেন পর্বগুলি বাদ দিতে পারি। কেননা, সাধারণভাবে বলা যায় : $\exists xFx$, Fa থেকে $Fa \supset Q$-তে পৌঁছাতে পারলে তার থেকে সহজেই (7—9-এর মত পর্ব যোগ করে) Q নিষ্কাশন করা যায়। কাজেই উপরোক্ত অবরোহটি সংক্ষেপে এভাবে লেখা যায়।

[১.৪]

1. $\text{U}x(Fx \supset Gx)$
2. $\exists xFx$
→3. Fa
4. $Fa \supset Ga$
5. Ga
6. $\exists xGx$ 5 EG

7. $\exists xGx$ 2, 3→6 EI

7-এর টিপ্পনী লক্ষ কর। আর এ অবরোহের সঙ্গে ১.২-এর তুলনা কর। লক্ষণীয়, এদের মধ্যে বিশেষ কোনো পার্থক্য নেই (একটাতে বক্র তীর আছে, অন্যটাতে নেই—এই যা পার্থক্য)।

এবার ১.৩-এর দিকে নজর দাও। দেখ, এটা একটা প্রাকল্পিক প্রমাণ (CP), এতে EI-এর নামগন্ধও নেই। কাজেই প্রশ্ন উঠতে পারে : তাহলে শুধু শুধু EI প্রয়োগ করতে যাব কেন ? এরকম ক্ষেত্রে EI বাদ দিয়ে চললে কী ক্ষতি ?

উত্তর : প্রাকল্পিক প্রমাণে যেকোনো বাক্য প্রকল্প হিসাবে নেওয়া যায়, যদি—প্রকল্প-হিসাবে-নেওয়া বাক্যটির বিচ্যুতিকরণ করা হয়। কিন্তু উক্তরূপ প্রমাণে যা প্রকল্প হিসাবে নিতে হয় তা আসলে প্রদত্ত হেতুবাক্য $\exists x$ ($\cdots x \cdots$)-এর প্রতিনিধি দৃষ্টান্ত (এরকম ক্ষেত্রে অন্য কোনো বাক্য নিলে চলে না)। তাছাড়া এ রকম প্রমাণে কোনো বাক্য প্রকল্প হিসাবে নিতে গেলে EI বিধির নিষিদ্ধগুলি মেনে চলতে হয়। যেমন, যদি উপরোক্ত যুক্তির সিদ্ধান্তে a থাকত (যেমন, যদি সিদ্ধান্তটি হত Ga) তাহলে প্রকল্প হিসাবে Fa নেওয়া যেত না। তার মানে, ১.৩-এর মত অবরোহেও প্রচ্ছন্নভাবে EI প্রয়োগ করা হয়, EI-এর বিধি নিষেধ মেনে চলা হয়। কাজেই, EI-এর প্রয়োগের কথা চেপে গিয়ে, উক্তরূপ অবরোহকে সাধারণ প্রাকল্পিক প্রমাণ বলে চালানো অসঙ্গত।

একটা যুক্তি নিয়ে এর বৈধতা প্রমাণ চারভাবে বিন্যস্ত করা হল। এদের মধ্যে ১.৩-এর মত বিন্যাস আমরা অগ্রাহ্য করতে পারি ; কেননা এ আকারে স্পষ্ট করে EI-এর উল্লেখ নেই। ১.২ আর ১.৪-এর মধ্যে কেউ কেউ ১.২-এর আর কেউ কেউ ১.৪-এর, মত বিন্যাস পছন্দ করেন। আমরা কিন্তু সাধারণভাবে পূর্ববর্ণিত রীতি অনুসারে EI প্রয়োগ করব। কেননা ১.২ আর ১.৪-এর মত অবরোহের দরকার হয়েছিল EI-এর

ন্যায্যতা দেখাতে গিয়ে। EI সম্পর্কে সংশয় দূর করলাম। এখন পূর্বোক্ত রীতিতে EI প্রয়োগ করতে কী দোষ ?

এখানেই এ অধ্যায় শেষ না করে আরও দুটি উদাহরণ নিলাম। এবং দুভাবে EI-এর প্রয়োগ দেখালাম।

[২.১]

1. $Ux(Gx \supset Hx)$
2. $\exists x(Fx \cdot Gx)$ $/\therefore \exists x(Fx \cdot Hx)$
3. $Fa \cdot Ga$ 2 EI
4. Fa 3 Simp.
5. $Ga \cdot Fa$ 2 Com.
6. Ga 5 Simp.
7. $Ga \supset Ha$ 1 UI
8. Ha 7, 6 MP
9. $Fa \cdot Ha$ 4, 9 Adj.
10. $\exists x(Fx \cdot Hx)$ 9 EG

[২.২]

1. $Ux(Gx \supset Hx)$
2. $\exists x(Fx \cdot Gx)$ $/\therefore \exists x(Fx \cdot Hx)$
3. $Fa \cdot Ga$ প্রকল্প
4. Fa
5. $Ga \cdot Fa$
6. Ga
7. $Ga \supset Ha$
8. Ha
9. $Fa \cdot Ha$
10. $\exists x(Fx \cdot Hx)$ 9 EG
11. $\exists x(Fx \cdot Hx)$ 2, 3→10 EI

[৩.১]

1. $Ux[Tx \supset (Fx \cdot Dx)]$
2. $\exists x(Tx \cdot Bx)$ $/\therefore \exists x(Dx \cdot Bx)$
3. $Ta \cdot Ba$ প্রকল্প
4. $Ta \supset (Fa \cdot Da)$ 1 UI
5. Ta 3 Simp.
6. $Fa \cdot Da$ 4, 5 MP
7. $Da \cdot Fa$ 6 Com.

8.	Da	7 Simp.
9.	$Ba \cdot Ta$	3 Com.
10.	Ba	9 Simp.
11.	$Da \cdot Ba$	8, 10 Adj.
12.	$\exists x(Dx \cdot Bx)$	11 EG
13.	$\exists x(Dx \cdot Bx)$	2, 3 → 12 EI

[৩.২]

1.	$Ux[Tx \supset (Fx \cdot Dx)]$	
2.	$\exists x(Tx \cdot Bx)$	/∴ $\exists x(Dx \cdot Bx)$
→3.	$Ta \cdot Ba$	
4.	$Ta \supset (Fa \cdot Da)$	
5.	Ta	
6.	$Fa \cdot Da$	
7.	$Da \cdot Fa$	
8.	Da	
9.	$Ba \cdot Ta$	
10.	Ba	
11.	$Da \cdot Ba$	
12.	$\exists x(Dx \cdot Bx)$	11 EG
13.	$\exists x(Dx \cdot Bx)$	2, 3 → 12 EI

৭

অবৈধতা প্রমাণ পদ্ধতি

১. ভূমিকা ঃ বাক্য যুক্তি ও বিধেয় যুক্তির অবৈধতা

সত্যমূল্য আরোপ করে কিভাবে বাক্যযুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করা যায় তা নিশ্চয়ই তোমাদের জানা। আর তা যদি হয় তাহলে তোমাদের নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির অবৈধতা প্রমাণ করতে পারার কথা। তবু যুক্তিগুলির অবৈধতা-প্রমাণ দিয়ে দেওয়া হল।

যুক্তি ১ : $A \vee B \vee C \vee D \quad \therefore C \vee D$

অবৈধতা প্রমাণ

উক্ত যুক্তির হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্তে

A	B	C	D
1	1	0	0

এ সত্যমূল্য আরোপ করলে দেখা যাবে ঃ যুক্তিটির হেতুবাক্য সত্য, সিদ্ধান্ত মিথ্যা। সুতরাং যুক্তিটি অবৈধ। এ প্রমাণ এভাবে সংক্ষেপে ব্যক্ত করা যায়—

A	B	C	D	$A \vee B \vee C \vee D$	$\therefore C \vee D$
1	1	0	0	1	0

যুক্তি ঃ ২ $Aa \vee Ab \vee Ac \vee Ad \quad \therefore Ac \vee Ad$

অবৈধতা প্রমাণ

Aa	Ab	Ac	Ad
1	1	0	0

এ সত্যমূল্য বিন্যাসে উক্ত যুক্তির হেতুবাক্য সত্য, সিদ্ধান্ত মিথ্যা। সুতরাং যুক্তিটি অবৈধ।

যুক্তি ৩ : $(Ca \supset Ba) \cdot (Cb \supset Bb)$
$(Aa \supset Ba) \cdot (Ab \supset Bb)$
$\therefore (Aa \supset Ca) \cdot (Ab \supset Cb)$

অবৈধতা প্রমাণ

Aa	Ab	Ba	Bb	Ca	Cb
1	1	1	1	1	0

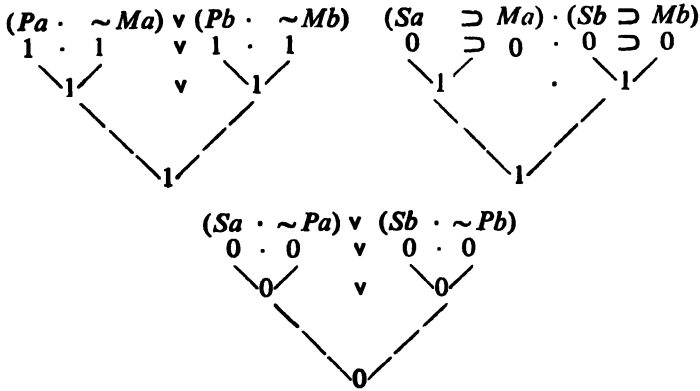
এ সত্যমূল্য বিন্যাসে উক্ত যুক্তির হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা। সুতরাং যুক্তিটি অবৈধ।

যুক্তি ৪ : $(Pa \cdot \sim Ma) \vee (Pb \cdot \sim Mb)$
$(Sa \supset Ma) \cdot (Sb \supset Mb)$
$\therefore (Sa \cdot \sim Pa) \vee (Sb \cdot \sim Pb)$

অবৈধতা প্রমাণ

Sa	Sb	Pa	Pb	Ma	Mb
0	0	1	1	0	0

এ সত্যমূল্য বিন্যাসে উক্ত যুক্তির হেতুবাক্য সত্য, সিদ্ধান্ত মিথ্যা। সুতরাং যুক্তিটি অবৈধ।

এ সত্যমূল্য আরোপ করলে উক্ত যুক্তির হেতুবাক্য সত্য আর সিদ্ধান্ত মিথ্যা যে হয় তা কষে দেখানো হল।

বলা বাহুল্য, যুক্তি ১ একটি বাক্য যুক্তি। লক্ষণীয়, যুক্তি ২, ৩, ৪-ও আসলে বাক্য যুক্তি। যুক্তি ১-এর সঙ্গে এদের পার্থক্য হল এই : ১-এর অন্তর্গত আণবিক বাক্যগুলির আন্তর গঠন দেখানো হয় নি ; কিন্তু ২, ৩, ৪-এর বেলায় যোজিত (ব্যক্তিবিষয়ক) বাক্যগুলির আন্তর গঠন (কোন ব্যক্তিতে কোন ধর্ম আছে তা) দেখানো হয়েছে। এ ছাড়া যুক্তি ১ আর অন্য যুক্তিগুলির মধ্যে কোনো ভেদ নেই, চারটি যুক্তিই বাক্যযুক্তি।

বিধেয় যুক্তিকে যদি উক্তরূপ যুক্তিতে—২, ৩ বা ৪-এর মত যুক্তিতে—রূপান্তরিত করা সম্ভব হত তাহলে সহজেই বাক্য যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ পদ্ধতি দিয়েই বিধেয় যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করা যেত। তোমার মনে হতে পারে : বিধেয় যুক্তিকে উক্তরূপ বাক্যযুক্তির আকারে রূপান্তর করা সম্ভব, কেননা (তুমি মনে করতে পার) সার্বিকমানকযুক্ত বাক্য ত আসলে সংযৌগিক আর সাত্তিকমানকযুক্ত বাক্য আসলে বৈকল্পিক বাক্য। তুমি তোমার বক্তব্যের সমর্থনে যে রকম উদাহরণ দিতে পারতে সে রকম কয়টি উদাহরণ রূপান্তর করে দেখানো হল।

সব প্রকৃত খৃষ্টান হল ধার্মিক

$Ux(Cx \supset Vx)$ [(Cx = x প্রকৃত খৃষ্টান
Vx = x ধার্মিক]

এখন (আমরা জানি, ধর, জানি :) বিশ্বে প্রকৃত খৃষ্টান কেবল একজনই আছে, তিনি স্বয়ং যীশুখৃষ্ট। কাজেই উক্ত বাক্যের সমার্থক হিসাবে লিখতে পারি।

$Ca \supset Va$* [a = যীশুখৃষ্ট]

---

* এ বাক্যটিকে এভাবেও লেখা যেত : $(Ca \supset Va) \cdot (Ca \supset Va)$। সুতরাং বাক্যটি সংযৌগিক বলে গণ্য।

আর

এমন ব্যক্তি আছে যে প্রকৃত খৃষ্টান ও ধার্মিক

$$\exists x(Cx \cdot Vx)$$

-এর সমার্থক হিসাবে লিখতে পারি

$$Ca \cdot Va^*$$

(ধরা যাক, আমরা জানি :) বিশ্বে কেবল দুজন সাধু রাজনীতিক নেতা আছে—এরা হল a ব্যক্তি আর b ব্যক্তি। তাহলে

সব সাধু রাজনীতিক নেতা হল আত্মত্যাগী

$U x(Hx \supset Sx)$ [$Hx = x$ সাধু রাজনীতিক নেতা]
[$Sx = x$ হল আত্মত্যাগী]

এ বাক্যের সমার্থক হিসাবে লিখতে পারি

$$(Ha \supset Sa) \cdot (Hb \supset Sb)$$

আর

এমন ব্যক্তি আছে যে সাধু রাজনীতিক নেতা ও আত্মত্যাগী

$$\exists x(Hx \cdot Sx)$$

এ বাক্যের সমার্থক হিসাবে লিখতে পারি

$$(Ha \cdot Sa) \vee (Hb \cdot Sb)$$

(ধরা যাক, আমরা জানি :) বিশ্বে কেবল তিনজন জ্ঞানী ব্যক্তি আছে—আরিস্টটল (a), বুদ্ধ (b) আর কনফুসিয়াস (c)। তাহলে

সব প্রকৃত জ্ঞানী ব্যক্তি হল মুক্ত পুরুষ

$U x(Wx \supset Fx)$ [$Wx = x$ প্রকৃত জ্ঞানী
$Fx = x$ মুক্ত পুরুষ]

এ বাক্যের সমার্থক হিসাবে লিখতে পারি

$$(Wa \supset Fa) \cdot (Wb \supset Fb) \cdot (Wc \supset Fc)$$

আর

অন্তত এক ব্যক্তি আছে যে প্রকৃত জ্ঞানী ও মুক্ত পুরুষ

$$\exists x(Wx \cdot Fx)$$

এ বাক্যের সমার্থক হিসাবে লিখতে পারি

$$(Wa \cdot Fa) \vee (Wb \cdot Fb) \vee (Wc \cdot Fc)$$

---

* $Ca \cdot Va$ সম $(Ca \cdot Va) \vee (Ca \cdot Va)$। সুতরাং $Ca \cdot Va$ বৈকল্পিক বলে গণ্য।

আর একটা উদাহরণ ঃ

সব বেদ আর্যদের লেখা

$Ux(Vx \supset Ax)$ [$Vx = x$ হল বেদ
$Ax = x$ হল আর্যদের লেখা]

যেহেতু বেদ কেবল মাত্র চারটি ঃ সাম (a), ঋক্ (b), যজু (c), অথর্ব (d), সেহেতু উক্ত উক্তি করলে বস্তুত বলা হয়

$$(Va \supset Aa) \cdot (Vb \supset Ab) \cdot (Vc \supset Ac) \cdot (Vd \supset Ad)$$

আর

কোনো কোনো বেদ আর্যদের লেখা

$\exists x(Vx \cdot Ax)$

এ উক্তি করলে বস্তুত বলা হয়

$$(Va \cdot Aa) \vee (Vb \cdot Ab) \vee (Vc \cdot Ac) \vee (Vd \cdot Ad)$$

২. কৃত্রিম বিশ্ব ঃ Ux-বদ্ধ ও ∃x-বদ্ধ বাক্য

সার্বিকমানকযুক্ত বাক্য হল সংযৌগিক আর সাত্তিকমানকযুক্ত বাক্য হল বৈকল্পিক—এ কথা কিন্তু পুরোপুরি ঠিক নয়। সব সময় সার্বিকমানাংকিত বাক্যকে (সীমিত) সংযৌগিকে আর সাত্তিকমানাংকিত বাক্যকে (সীমিত) বৈকল্পিকে রূপান্তরিত করা যায় না। কেননা সাধারণত সার্বিক ও আংশিক বাক্যে যে শ্রেণীগুলির* উল্লেখ থাকে ওগুলি মুক্ত শ্রেণী। মানে—এ জাতীয় শ্রেণীর, যথা মানুষ শ্রেণীর, অন্তর্গত ব্যক্তির সংখ্যা অনির্দিষ্ট ও অসংখ্য। আর, সব ব্যক্তির সন্ধান মিললেও যে সংযৌগিক ও বৈকল্পিক গঠন করতে হত তা লেখা অসম্ভব হয়ে পড়ত। যথা, ধর—a, b, c, d, e……ইত্যাদি মানুষের নাম। তাহলে

সব মানুষ মরণশীল

$Ux(Hx \supset Mx)$

-এ বাক্যের সমার্থক হিসাবে

$$(Ha \supset Ma) \cdot (Hb \supset Mb) \cdot (Hc \supset Mc) \cdot (Hd \supset Md) \cdot (He \supset Me)$$

লিখলেই চলবে না। কেননা আরও বহু মনুষ্য ব্যক্তি আছে। কাজেই উক্ত সংযোগীগুলির মত আরও অসংখ্য সংযোগী উপরোক্ত বাক্যে যোগ করতে হবে। বলা বাহুল্য, তা সম্ভব নয়। সে রকম

কোনো কোনো মানুষ জ্ঞানী

$\exists x(Hx \cdot Wx)$

এ বাক্যের সমার্থক হিসাবে, কেবল

$$(Ha \cdot Wa) \vee (Hb \cdot Wb) \vee (Hc \cdot Wc) \vee (Hd \cdot Wd) \vee (He \cdot We)$$

---

* বিধেয় নিরূপিত শ্রেণী

লিখলেই চলবে না ; এ বাক্যের সঙ্গে আরও অসংখ্য বিকল্প যোগ করতে হবে। এজন্য আমরা বলেছি (পৃঃ ২১, ২৩ দ্রষ্টব্য) : সার্বিকমানকযুক্ত বাক্য হল অসীমিত সংযৌগিক আর সাত্তিকমানকযুক্ত বাক্য হল অসীমিত বৈকল্পিক।

ওপরে প্রকৃত খৃষ্টান, বেদ প্রভৃতি সম্পর্কে যে বাক্যগুলি উদাহরণ হিসাবে দেওয়া হয়েছে এবং যেভাবে এদের রূপান্তর দেখানো হয়েছে তার থেকে একটা শিক্ষা পাই। বিধেয়গুলি যদি কেবল কয়েকটি নির্দিষ্ট সীমিত ব্যক্তি সম্পর্কেই প্রযোজ্য হয়, মানে বিধেয় নিরূপিত শ্রেণীর অন্তর্ভূত ব্যক্তির সংখ্যা যদি সুনির্দিষ্ট ও সীমিত হয়, এক কথায়—আমাদের প্রসঙ্গ বিশ্ব* যদি ক্ষুদ্র, স্বল্প-ও-সুনির্দিষ্ট-সংখ্যক-ব্যক্তিধারী হয় তাহলে Ux-বদ্ধ বাক্যকে সীমিত সংযৌগিকে, আর ∃x-বদ্ধ বাক্যকে সীমিত বৈকল্পিকে, রূপান্তরিত করা যায়।

আর আলোচনার সুবিধার জন্য আমরা এমন প্রসঙ্গ বিশ্ব, সংক্ষেপে বিশ্ব, কল্পনা করে নিতে পারি যে বিশ্বে আছে সীমিত সংখ্যক ব্যক্তি। যথা—একটি ব্যক্তি, দুটি ব্যক্তি, তিনটি ব্যক্তি, ইত্যাদি। এবং আরও কল্পনা করে নিতে পারি, এ ব্যক্তিগুলির নাম আমাদের জানা। যথা, ধরা যাক, আমরা জানি যে এদের নাম a, b, c ইত্যাদি। অথবা আমরা ব্যক্তিগুলিকে a, b, c ইত্যাদি নামে চিহ্নিত করতে পারি। এখন, যদি কোনো কল্পিত বিশ্বে কেবল একটি ব্যক্তি a, থাকে তাহলে সে বিশ্বে

$$\mathrm{U}x(Fx \supset Gx) \text{ সম } Fa \supset Ga$$
$$\exists x(Fx \cdot Gx) \text{ সম } Fa \cdot Ga$$

আমরা এরূপ কল্পিত বিশ্ব বোঝাব একটা চতুর্ভুর্জ দিয়ে। আর, এর অন্তর্গত ব্যক্তি হল কেবল a, বা কেবল a আর b, বা কেবল a, b আর c—এ রকম কথা বোঝাব চতুর্ভুর্জটির ভেতরে a ; a, b ; a, b, c প্রভৃতি নাম, নামসমষ্টি লিখে। তাহলে ওপরে যে সমার্থতার কথা বললাম তা এভাবে লিখতে পারি

$$\boxed{a}^{**} \quad \mathrm{U}x(Fx \supset Gx) \text{ সম } Fa \supset Ga$$
$$\exists x(Fx \cdot Gx) \text{ সম } Fa \cdot Ga$$

ধরা যাক, কোনো বিশ্বে আছে কেবল দুটি ব্যক্তি, a, b। সেক্ষেত্রে

$$\boxed{a, b} \quad \mathrm{U}x(Fx \supset Gx) \text{ সম } (Fa \supset Ga) \cdot (Fb \supset Gb)$$
$$\exists x(Fx \cdot Gx) \text{ সম } (Fa \cdot Ga) \vee (Fb \cdot Gb)$$

অনুরূপভাবে

$$\boxed{a, b, c} \quad \mathrm{U}x(Fx \supset Gx) \text{ সম } (Fa \supset Ga) \cdot (Fb \supset Gb) \cdot (Fc \supset Gc)$$
$$\exists x(Fx \cdot Gx) \text{ সম } (Fa \cdot Ga) \vee (Fb \cdot Gb) \vee (Fc \cdot Gc)$$

---

* universe of discourse

** পড়তে হবে এভাবে : ধর, বিশ্বে আছে কেবল একটি ব্যক্তি a, তাহলে :

প্রশ্ন তুলতে পারে : এ রকম কৃত্রিম ক্ষুদ্র বিশ্ব কল্পনা করে কী লাভ ? এর উত্তর : দেখতে পাবে, এ রকম ক্ষুদ্র বিশ্বে কোনো বাক্যের মিথ্যাত্ব বা কোনো যুক্তির অবৈধতা, প্রমাণ করে দাবী করা যায় যে, বাক্যটি মিথ্যা বা যুক্তিটি অবৈধ।

ধর, ঐ ঘরে তিনজন লোক আছে—a, b, c। (রাম, শ্যাম, যদু) এবং ঐ ঘরই আমাদের বিশ্ব, প্রসঙ্গ বিশ্ব। আমরা এখন এ বিশ্ব ছাড়া অন্য কিছু সম্পর্কে কথা বলব না। আমরা জানি, কোনো সার্বিক বাক্য মিথ্যা বলে প্রমাণিত হয়, যদি এর কোনো বিরুদ্ধ দৃষ্টান্ত দেখানো যায়। এ কথাটা এভাবেও বলতে পারি : যে সার্বিক বাক্য কোনো একটি বিশ্বে মিথ্যা, তা মিথ্যা। মনে করা যাক, কেউ দাবী করল যে : সব মানুষই ৫ ফুটের বেশী লম্বা। এখন, আমাদের প্রসঙ্গ বিশ্বের দিকে তাকালে দেখি c (যদু) লম্বায় ৫ ফুটের কম। সুতরাং এ বিশ্বে এ বাক্য মিথ্যা। সুতরাং যেকোনো বৃহত্তর বিশ্বে এ বাক্য মিথ্যা। সুতরাং প্রমাণিত হল যে বাক্যটি মিথ্যা। কেননা, কোনো সার্বিক বাক্য যদি কোনো বিশ্বে মিথ্যা হয় তাহলে অবশ্যই বাক্যটি বৃহত্তর বিশ্বেও মিথ্যা।*

সার্বিক বাক্যের মিথ্যাত্ব প্রমাণ সম্বন্ধে যা বলা হল প্রাকল্পিক বাক্যের মিথ্যাত্ব সম্পর্কেও তা বলা যায়। কেননা সার্বিক বাক্য হল প্রাকল্পিকের সাধারণীকৃত রূপ (generalized conditional)। একটা উদাহরণ।

(i) $Ha \supset Sa$	[$Hx = x$ হল মানুষ
(ii) $Hb \supset Sb$	$Sx = x$ হল ৬ ফুট লম্বা
(iii) $Hc \supset Sc$	a=রাম, b=শ্যাম, c=যদু]
....	

এ রকম প্রাকল্পিকের ভিত্তিতে পাই এ সাধারণীকৃত প্রাকল্পিক বা সার্বিক বাক্য

$$Ux(Hx \supset Sx)$$

এরকম কোনো সার্বিক বাক্যের মিথ্যাত্ব দেখাতে গিয়ে আসলে আমরা (i), (ii), (iii)-এর মত কোনো বাক্যের মিথ্যাত্ব দেখাই। যেমন, পূর্বকল্পিত বিশ্বে $Hc \supset Sc$ মিথ্যা ; কেননা—c (যদু) মানুষ, কিন্তু ৫ ফুটের বেশী লম্বা নয়। সুতরাং আমরা বলতে পারি : যে প্রাকল্পিক বাক্য কোনো বিশ্বে মিথ্যা (সে বিশ্ব যতই ক্ষুদ্র হোক) সে বাক্য মিথ্যা—যেকোনো (বৃহত্তর) বিশ্বে মিথ্যা। এবং তাহলে কোনো প্রাকল্পিক বাক্যের মিথ্যাত্ব দেখাতে পারি—কোনো ক্ষুদ্র বিশ্বের বেলায় এটা দেখিয়ে : (দেখ) এ বিশ্বে এ প্রাকল্পিকটি মিথ্যা (এর পূর্বকল্প সত্য ও অনুকল্প মিথ্যা) বা এমন হতে বাধা নেই। যেমন, $Hc \supset Sc$-এর মিথ্যাত্ব দেখাতে পারি এটা দেখিয়ে যে আমাদের কল্পিত বিশ্বে Hc সত্য কিন্তু Sc মিথ্যা বা Hc-সত্য-কিন্তু-Sc-মিথ্যা হতে বাধা নেই।

---

* কিন্তু কোনো সার্বিক বাক্য কোনো সম্ভাব্য বিশ্বে সত্য হলেই দাবী করা যায় না যে, বাক্যটি সত্য। তার মানে, উক্তরূপ সীমিত বিশ্ব কল্পনা করে নিয়ে বাক্যের মিথ্যাত্ব প্রমাণ করা যায়, সত্যতা প্রমাণ করা যায় না।

সার্বিক ও প্রাকল্পিক বাক্যের মিথ্যাত্ব প্রমাণ সম্পর্কে যা বলা হল বিধেয় যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ সম্পর্কেও তা বলা যায়। বলা যায় : কোনো বিধেয় যুক্তি যদি কোনো কল্পিত বিশ্বে অবৈধ হয় তাহলে যুক্তিটি অবৈধ বলে গণ্য*। বলা যায় : যেভাবে সার্বিক ও প্রাকল্পিকের মিথ্যাত্ব দেখানো যায় ঠিক সেভাবেই বিধেয় যুক্তির অবৈধতা দেখানো যায়। আমরা জানি, 'অমুক যুক্তি অবৈধ' এ কথার মানে : যুক্তিটির অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক** বাক্য অ-স্বতসত্য—মিথ্যা বা এমন-হতে-পারে-যে-মিথ্যা। এখন যদি দেখাতে পারি, অমুক কল্পিত বিশ্বে অমুক প্রাকল্পিক বাক্যটি, অমুক যুক্তির অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকটি, মিথ্যা, তাহলে প্রমাণ হয়ে গেল, যুক্তিটি অবৈধ।

ধর, এ যুক্তিটির অবৈধতা প্রমাণ করতে হবে :

$$\begin{array}{ll} & Ux(Px \supset Mx) \\ & Ux(Sx \supset Mx) \\ \therefore & Ux(Sx \supset Px) \end{array}$$

ধরা যাক, বিশ্বে আছে কেবল একটি ব্যক্তি a। তাহলে উক্ত যুক্তি উত্থাপন করলে বস্তুত বলা হয়—

$$\begin{array}{ll} & Pa \supset Ma \\ & Sa \supset Ma \\ \therefore & Sa \supset Pa \end{array}$$

এ যুক্তি অবৈধ বলে প্রমাণিত হবে যদি দেখানো যায় যে এর অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক

$$[(Pa \supset Ma) \cdot (Sa \supset Ma)] \supset (Sa \supset Pa)$$

মিথ্যা বা অ-স্বতসত্য।

আমরা ধরে নিলাম যে আমাদের কল্পিত বিশ্বের a হল S, a হল M ; কিন্তু a P নয়, মানে : Sa আর Ma সত্য, Pa মিথ্যা—

Sa	Pa	Ma
1	0	1

দেখ, এ সত্যমূল্য বিন্যাসে

$$[(Pa \supset Ma) \cdot (Sa \supset Ma)] \supset (Sa \supset Pa)$$

মিথ্যা। সুতরাং আলোচ্য যুক্তিটি অবৈধ।

* কিন্তু এ দাবী করা যায় না যে, এ যুক্তি অমুক বিশ্বে বৈধ, সুতরাং যুক্তিটি বৈধ। কাজেই কোনো বিশ্ব কল্পনা করে নিয়ে যুক্তির বৈধতা প্রমাণ করা যায় না।

** কোনো যুক্তির হেতুবাক্যটিকে, বা এর হেতুবাক্যগুলি দিয়ে গঠিত সংযৌগিককে, পূর্বকল্প করে আর এর সিদ্ধান্তকে অনুকল্প করে যে প্রাকল্পিক পাওয়া যায় তাকেই ঐ যুক্তির অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক বলে।

৩. বিধেয় যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ

ওপরে একটা বিধেয় যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ দিয়ে দেওয়া হয়েছে। এ রকম প্রমাণে অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক-এর কথা বলার দরকার নেই। কেবল এটা দেখালেই চলবে যে অমুক বিশ্বে অমুক সত্যমূল্য বিন্যাসে এ যুক্তির হেতুবাক্য সত্য, সিদ্ধান্ত মিথ্যা। যেমন, উক্ত অবৈধতা প্রমাণটি সংক্ষেপে এভাবে লেখা যায়

$$\begin{array}{llcl} & Ux(Px \supset Mx) & \boxed{a} :^* & Pa \supset Ma \\ & Ux(Sx \supset Mx) & & Sa \supset Ma \\ \therefore & Ux(Sx \supset Px) & \therefore & Sa \supset Pa \end{array}$$

Sa	Pa	Ma	$Pa \supset Ma,$	$Sa \supset Ma$	$Sa \supset Pa$
1	0	1	1	1	0

এবার নাও এ যুক্তিটি :

	All philosophers are wise,		$Ux(Px \supset Wx)$
	Socrates is wise,		Ws
∴	Socrates is a philosopher.	∴	Ps

মনে করা যাক, বিশ্বে আছে কেবল একটি ব্যক্তি s (এ ব্যক্তিটির নাম s দেওয়া হল, কেননা দ্বিতীয় হেতুবাক্যে ও সিদ্ধান্তে আছে এ নামটি)। এখন, যে বিশ্বে কেবল একটি ব্যক্তি s আছে সে বিশ্বে উক্ত যুক্তি উত্থাপন করলে বলা হয়

$$\begin{array}{ll} & Ps \supset Ws \\ & Ws \\ \therefore & Ps \end{array}$$

Ps	Ws
0	1

এ সত্যমূল্য বসালে দেখা যায়, উক্ত যুক্তির হেতুবাক্য সত্য সিদ্ধান্ত মিথ্যা। সুতরাং যুক্তিটি অবৈধ। এ প্রমাণটি এভাবে লেখা সুবিধাজনক।

$$\begin{array}{llcl} & Ux(Px \supset Wx) & \boxed{s} : & Ps \supset Ws \\ & Ws & & Ws \\ \therefore & Ps & \therefore & Ps \end{array}$$

Ps	Ws	$Ps \supset Ws,$	Ws	Ps
0	1	1	1	0

ওপরের অবৈধতা প্রমাণগুলি লক্ষ করলে বোঝা যাবে :

বিধেয় যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করতে হলে

প্রথমে একটা সীমিত ক্ষুদ্র বিশ্ব কল্পনা করতে হবে, এবং

---

* এ চিহ্নটি পড়তে হবে এভাবে—যে বিশ্বে কেবল একটি ব্যক্তি a আছে সে বিশ্বে উক্ত (বামধারের) যুক্তিটির বক্তব্য হল ;

ঐ বিশ্বে কোন্ (বা কোন্ কোন্) ব্যক্তি আছে তা স্পষ্ট করে বলতে হবে, তারপর
সে কল্পনা অনুসারে বিধেয় যুক্তিটিকে বাক্য যুক্তিতে রূপান্তরিত করতে হবে।

মনে রাখবে, এরূপ সীমিত বিশ্বে

Ux-বদ্ধ বাক্য হল সীমিত সংযৌগিক, আর
$\exists x$-বদ্ধ বাক্য হল সীমিত বৈকল্পিক বাক্য।

নিচে কয়টি বিধেয় যুক্তি-আকারের অবৈধতা-প্রমাণ দিয়ে দেওয়া হল।

Darapti

All M are P সংকেতলিপিতে $Ux(Mx \supset Px)$
All M are S $Ux(Mx \supset Sx)$
∴ Some S are P ∴ $\exists x(Sx \cdot Px)$

অবৈধতা প্রমাণ

$Ux(Mx \supset Px)$ $\boxed{a}$: $Ma \supset Pa$
$Ux(Mx \supset Sx)$ $Ma \supset Sa$
∴ $\exists x(Sx \cdot Px)$ ∴ $Sa \cdot Pa$

Sa	Pa	Ma	$Ma \supset Pa$,	$Ma \supset Sa$	$Sa \cdot Pa$
0	0	0	1	1	0

Felapton

Emp, Ams ∴ Osp

-এর অবৈধতা প্রমাণ

$Ux(Mx \supset \sim Px)$ $\boxed{a}$: $Ma \supset \sim Pa$
$Ux(Mx \supset Sx)$ $Ma \supset Sa$
∴ $\exists x(Sx \cdot \sim Px)$ ∴ $Sa \cdot \sim Px$

Sa	Pa	Ma	$Ma \supset \sim Pa$,	$Ma \supset Sa$	$Sa \cdot \sim Pa$
0	0	0	1	1	0

Bramantip

Epm, Ams ∴ Isp

এর অবৈধতা প্রমাণ

$Ux(Px \supset Mx)$ $\boxed{a}$: $Pa \supset Ma$
$Ux(Mx \supset Sx)$ $Ma \supset Sa$
∴ $\exists x(Sx \cdot Px)$ ∴ $Sa \cdot Pa$

Sa	Pa	Ma	$Pa \supset Ma$,	$Ma \supset Sa$	$Sa \cdot Pa$
0	0	0	1	1	0

Fesapo

Epm, Ams ∴ Osp

-এর অবৈধতা প্রমাণ

$$\begin{array}{lcl} Ux(Px \supset \sim Mx) & \boxed{a} : & Pa \supset \sim Ma \\ Ux(Mx \supset Sx) & & Ma \supset Sa \\ \therefore\ \exists x(Sx \cdot \sim Px) & & \therefore\ Sa \cdot \sim Pa \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} Sa & Pa & Ma & Pa \supset \sim Ma, & Ma \supset Sa & Sa \cdot \sim Pa \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

এবার যে যুক্তিটি নিলাম সেটা ন্যায় নয়।

$$\begin{array}{lcl} Ux[Ax \supset (Bx \vee Cx)] & \boxed{a} : & Aa \supset (Ba \vee Ca) \\ Ux[(Bx \cdot Ax) \supset \sim Cx] & & (Ba \cdot Aa) \supset \sim Ca \\ \exists x(Ax \cdot Cx) & & Aa \cdot Ca \\ \therefore\ \exists x(Ax \cdot Bx) & & \therefore\ Aa \cdot Ba \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} Aa & Ba & Ca & Aa \supset (Ba \vee Ca), & (Ba \cdot Aa) \supset \sim Ca, & Aa \cdot Ca \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} Aa \cdot Ba \\ \hline 0 \end{array}$$

এবার নিম্নোক্ত যুক্তিটির দিকে নজর দাও।

All *A* are *C*	$Ux(Ax \supset Cx)$
Some *B* are *C*	$\exists x(Bx \cdot Cx)$
All *A* are *B*	$\therefore\ Ux(Ax \supset Bx)$

ধর, বিশ্বে আছে কেবল *a* নামক ব্যক্তিটি। তাহলে উক্ত যুক্তিকে এভাবে সমবক্তব্য বাক্য-যুক্তিতে রূপান্তরিত করা যায়—

$$\begin{array}{l} Aa \supset Ca \\ Ba \cdot Ca \\ \therefore\ Aa \supset Ba \end{array}$$

দেখ, এ যুক্তির অবয়বে এমন সত্যমূল্য আরোপ করা যায় না, যাতে এর হেতুবাক্য হবে সত্য আর সিদ্ধান্ত হবে মিথ্যা। স্পষ্টতই সিদ্ধান্ত মিথ্যা হতে পারে নিম্নোক্ত সত্যমূল্য আরোপে :

$$\begin{array}{cc} Aa & Ba \\ \hline 1 & 0 \end{array}$$

কিন্তু এ মূল্য হেতুবাক্যে আরোপ করলে একটি হেতুবাক্য মিথ্যা হয়ে যাবে (দ্বিতীয় হেতুবাক্যটি)। কাজেই দেখানো যাবে না, যুক্তিটির হেতুবাক্য সত্য, সিদ্ধান্ত মিথ্যা। মানে, যুক্তিটির অবৈধতা দেখানো যাবে না। তাহলে কি বলব, যুক্তিটি বৈধ? এ কথা অনস্বীকার্য যে আমাদের কল্পিত বিশ্বে (যাতে আছে কেবল একটি ব্যক্তি *a*) যুক্তিটি

বৈধ।* আর তাহলে এ কথাও কি স্বীকার করতে হবে যে—যুক্তিটি বৈধ, যে কোনো বিশ্বে বৈধ? এর স্পষ্ট উত্তর : না। না, কেননা কোনো যুক্তি কোনো সম্ভাব্য (ক্ষুদ্র) বিশ্বে বৈধ হলে তা অন্য (বৃহত্তর) বিশ্বে বৈধ নাও হতে পারে। বস্তুত আলোচ্য যুক্তিটি অবৈধ—এটা দ্বিতীয় সংস্থানের IAI মূর্তির ন্যায়, অব্যাপ্য মধ্য দোষে দুষ্ট।

যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করতে গিয়ে এতক্ষণ পর্যন্ত আমরা এমন বিশ্ব কল্পনা করেছি যাতে আছে কেবল একটি ব্যক্তি a। ওপরের উদাহরণটি থেকে বোঝা গেল, এমন অবৈধ যুক্তি আছে যার অবৈধতা এরূপ (একব্যক্তিক) বিশ্বে প্রমাণ করা যায় না। দেখা যাবে, যদি কল্পনা করি যে, বিশ্বে একাধিক ব্যক্তি, যেমন কেবল দুটি ব্যক্তি বা তিনটি ব্যক্তি, আছে, তাহলে এরূপ যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করা যায়। নিচে আলোচ্য যুক্তিটির অবৈধতা-প্রমাণ দিয়ে দেওয়া হল।

$$\begin{array}{ll} & Ux(Ax \supset Cx) \\ & \exists x(Bx \cdot Cx) \\ \therefore & Ux(Ax \supset Bx) \end{array} \quad \boxed{a, b} : \quad \begin{array}{ll} & (Aa \supset Ca) \cdot (Ab \supset Cb) \\ & (Ba \cdot Ca) \vee (Bb \cdot Cb) \\ \therefore & (Aa \supset Ba) \cdot (Ab \supset Bb) \end{array}$$

Aa	Ab	Ba	Bb	Ca	Cb	হেতুবাক্য	সিদ্ধান্ত
1	1	1	0	1	1	1	0

আর একটা উদাহরণ।

$$\begin{array}{ll} & \exists x(Px \cdot Mx) \\ & \exists x(Sx \cdot Mx) \\ \therefore & \exists x(Sx \cdot Px) \end{array}$$

যদি কল্পনা করা হয় যে বিশ্বে কেবল একটি ব্যক্তি a আছে, তাহলে এ যুক্তিকে এভাবে সমবক্তব্য বাক্য যুক্তিতে রূপান্তরিত করতে হবে :

$$\begin{array}{ll} & Pa \cdot Ma \\ & Sa \cdot Ma \\ \therefore & Sa \cdot Pa \end{array}$$

এখন, এ যুক্তির অবয়বে এমন সত্যমূল্য আরোপ করা যায় না, যার ফলে এর হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা হবে। স্পষ্টতই সিদ্ধান্তটি মিথ্যা হতে পারে নিম্নোক্ত সত্যমূল্য আরোপে :

$$\frac{Sa \quad Pa}{1 \quad 0} \text{ বা } \frac{Sa \quad Pa}{0 \quad 1} \text{ বা } \frac{Sa \quad Pa}{0 \quad 0}$$

কিন্তু এ মূল্যগুলি হেতুবাক্যে আরোপ করলে হেতুবাক্য মিথ্যা হয়ে যায়, তার মানে—দেখানো যায় না যে, যুক্তিটির হেতুবাক্য সত্য, সিদ্ধান্ত মিথ্যা ; দেখানো যায় না যে—যুক্তিটি

*বৈধ ; কেননা, এ যুক্তির হেতুবাক্য সত্য সিদ্ধান্ত মিথ্যা ($Aa=1$, $Ba=0$)—এ কল্পনা করলে স্ববিরোধী কথা মানতে হয়, মানতে হয়—$B=1$, আবার $B=0$।

অবৈধ। কিন্তু যদি কল্পনা করা হয় যে, বিশ্বে আছে দুটি ব্যক্তি, a, b, তাহলে এ যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করা যাবে। নিচে উক্ত যুক্তির অবৈধতা-প্রমাণ দিয়ে দেওয়া হল।

$\exists x(Px \cdot Mx)$	$\overline{a, b}$:	$(Pa \cdot Ma) \vee (Pb \cdot Mb)$
$\exists x(Sx \cdot Mx)$		$(Sa \cdot Ma) \vee (Sb \cdot Mb)$
$\therefore \exists x(Sx \cdot Px)$		$(Sa \cdot Pa) \vee (Sb \cdot Pb)$

Sa	Sb	Pa	Pb	Ma	Mb	হেতুবাক্য	সিদ্ধান্ত
1	0	0	1	1	1	1	0

ওপরে যে অবৈধতা প্রমাণ পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হল তা নির্ভুলভাবে প্রয়োগ করতে হলে, এ অনুজ্ঞাগুলি মনে রাখবে।

(১) প্রথমে এমন একটি বিশ্ব কল্পনা করবে যাতে আছে কেবল একটি ব্যক্তি এবং এ কল্পনা অনুসারে প্রদত্ত বিধেয় যুক্তিটিকে বাক্য যুক্তিতে রূপান্তরিত করবে। যদি এমন সত্যমূল্য দেখাতে পার যা আরোপ করলে বাক্য-যুক্তিটির হেতুবাক্য সত্য ও সিদ্ধান্ত মিথ্যা হয়, তাহলে তোমার অবৈধতা প্রমাণের কাজ হয়ে গেল।
ধর, এ বাক্য যুক্তির বেলায় দেখানো গেল না যে, যুক্তিটির হেতুবাক্য সত্য সিদ্ধান্ত মিথ্যা। তাহলে

(২) এমন বিশ্ব কল্পনা করবে যাতে আছে কেবল দুটি ব্যক্তি। ধর, a আর b, এবং এ কল্পনা অনুসারে প্রদত্ত বিধেয় যুক্তিটিকে বাক্য যুক্তিতে রূপান্তরিত করবে। যদি এমন সত্যমূল্য দেখাতে পার যা আরোপ করলে বাক্য যুক্তিটির হেতুবাক্য সত্য সিদ্ধান্ত মিথ্যা হয়, তাহলে মূল যুক্তির অবৈধতা প্রমাণের কাজ হয়ে গেল।
ধর, দ্বিব্যক্তিক বিশ্ব কল্পনা করেও কোনো (অবৈধ) যুক্তির অবৈধতা দেখানো সম্ভব হল না। তাহলে

(৩) একটি তিন-ব্যক্তিক বিশ্ব কল্পনা করবে, যাতে আছে ধর, a, b, c, এবং এ কল্পনা অনুসারে............

উদাহরণ

$$\exists x(Sx \cdot Tx)$$
$$\exists x(Ux \cdot \sim Sx)$$
$$\exists x(Vx \cdot \sim Tx)$$
$$\therefore \exists x(Ux \cdot Vx)$$

বিশ্বে কেবল একটি ব্যক্তি a, বা কেবল দুটি ব্যক্তি a, b, আছে—এ কল্পনা করে এ যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করা যায় না। যায়, যদি তিন-ব্যক্তিক বিশ্ব কল্পনা কর। নিচে এ যুক্তিটির অবৈধতা-প্রমাণ দিয়ে দেওয়া হল।

$\boxed{a, b, c}$: $(Sa \cdot Ta) \vee (Sb \cdot Tb) \vee (Sc \cdot Tc)$
$(Ua \cdot \sim Sa) \vee (Ub \cdot \sim Sb) \vee (Uc \cdot \sim Sc)$
$(Va \cdot \sim Ta) \vee (Vb \cdot \sim Tb) \vee (Vc \cdot \sim Tc)$
$\therefore\ (Ua \cdot Va) \vee (Ub \cdot Vb) \vee (Uc \cdot Vc)$

Sa	Sb	Sc	Ta	Tb	Tc	Ua	Ub	Uc	Va	Vb	Vc
0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0

এ সত্যমূল্য বসালে উক্ত যুক্তির হেতুবাক্য সত্য, সিদ্ধান্ত মিথ্যা যে বস্তুত হয় তা নিচে দেখিয়ে দেওয়া হল।

$(Sa \cdot Ta) \vee (Sb \cdot Tb) \vee (Sc \cdot Tc)$
1 1 1 1
$(Ua \cdot \sim Sa) \vee (Ub \cdot \sim Sb) \vee (Uc \cdot \sim Sc)$
1 1 1 0 1
$(Va \cdot \sim Ta) \vee (Vb \cdot \sim Tb) \vee (Vc \cdot Tc)$
1 1 1 0 1
$(Ua \cdot Va) \vee (Ub \cdot Vb) \vee (Uc \cdot Vc)$
1 0 0 0 0 0 1 0 0 0

৪. অবৈধতা, বৈধতা ও কল্পিত বিশ্বের আয়তন

ধর, আলোচ্য পদ্ধতিতে কোনো যুক্তির অবৈধতা প্রমাণ করতে চাও। অবৈধতা প্রমাণ যদি ভালয় ভালয় হয়ে যায় ত ভাল কথা। যদি না হয়? তাহলে?

তাহলে কি বলব—যুক্তিটি বৈধ?

আমরা দেখেছি, এমন হতে পারে—কোনো যুক্তি কোনো ক্ষুদ্র বিশ্বে বৈধ, কোনো বৃহত্তর বিশ্বে অবৈধ। যেমন, পূর্ববর্তী অধ্যায়ের সর্বশেষ যুক্তিটি একব্যক্তিক বা দ্বিব্যক্তিক বিশ্বে বৈধ। কিন্তু বৃহত্তর বিশ্বে (যথা, ত্রিব্যক্তিক বিশ্বে) অবৈধ। যদি দেখি, কোনো যুক্তি একব্যক্তিক বিশ্বে বৈধ তাহলে আমরা বিশ্বের আয়তন বাড়াই—এমন বিশ্ব কল্পনা করি যাতে আছে দুটি ব্যক্তি। যদি দেখি, দ্বিব্যক্তিক বিশ্বেও যুক্তিটি বৈধ, তাহলে আমরা কল্পিত বিশ্বের আয়তন আরও বাড়াই—ত্রিব্যক্তিক বিশ্ব কল্পনা করি। প্রশ্ন হল, এভাবে ক্রমশ বৃহত্তর বিশ্ব কল্পনা করতে করতে কোথায় গিয়ে থামব?

> অমুক বৃহত্তর বিশ্বেও যুক্তিটি বৈধ, সুতরাং যুক্তিটি অবৈধ নয়, বৈধ—সব সম্ভাব্য বিশ্বেই বৈধ
>
> —এ কথা কখন বলা যাবে, বা আদৌ বলা যাবে কি?

প্রশ্নটা এভাবেও উত্থাপন করতে পারি—

> আলোচ্য পদ্ধতিতে অবৈধতা দেখানো যায়, জানি; কিন্তু বৈধতাও কি দেখানো যায়?

বা এভাবে

আলোচ্য পদ্ধতি প্রমাণ পদ্ধতি—অবৈধতা প্রমাণ পদ্ধতি, কিন্তু
এটা কি নির্ণয় পদ্ধতি বলেও গণ্য ?

ওপরে যে প্রশ্নটি* উত্থাপন করা হয়েছে তার উত্তর এভাবে দেওয়া হয়েছিল : কোনো যুক্তি কোনো সম্ভাব্য বিশ্বে বৈধ হলেও অন্য বিশ্বে অবৈধ হতে পারে। এ উত্তর দিলে বলা হয় : না, আলোচ্য পদ্ধতি নির্ণয় পদ্ধতি নয়, এ দিয়ে বৈধতা নির্ণয় বা প্রমাণ করা যায় না।

এ উত্তরটার সংশোধন দরকার। কেননা হালে, দেখানো হয়েছে যে, আলোচ্য পদ্ধতিও বৈধতা (অবৈধতা)—নির্ণয় পদ্ধতি বলে গণ্য। প্রমাণ করা হয়েছে : যদি কোনো যুক্তি অমুক আয়তনের বিশ্বেও বৈধ হয় তাহলে যুক্তিটি বৈধ। প্রমাণ করা হয়েছে :

যদি এমন হয় যে

কোনো যুক্তিতে আছে n সংখ্যক বিধেয় অক্ষর, এবং
যে বিশ্বে 2^n সংখ্যক ব্যক্তি সে বিশ্বে যুক্তিটি বৈধ

তাহলে যুক্তিটি বৈধ—সব সম্ভাব্য বিশ্বে বৈধ।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে, আলোচ্য পদ্ধতিতে বৈধতা অবৈধতা নির্ণয় করতে হলে এমন বিশ্ব কল্পনা করতে হবে যাতে আছে 2^n সংখ্যক ব্যক্তি। যেমন, ধর, কোনো যুক্তিতে আছে তিনটি বিধেয় অক্ষর। তাহলে এমন বিশ্ব কল্পনা করতে হবে যার অন্তর্ভুক্ত ব্যক্তি সংখ্যা হল 2^3 বা আটটি। এবং এ কল্পনা অনুসারে প্রদত্ত বিধেয় যুক্তিকে সমবক্তব্য বাক্য যুক্তিতে রূপান্তরিত করতে হবে, এবং বাক্য যুক্তির নিয়ম অনুসারে এর বৈধতা পরীক্ষা করতে হবে। এ যুক্তিটি যদি বৈধ হয় তাহলে মূল বিধেয় যুক্তিটিও বৈধ।

উদাহরণ

$$Ux(Mx \supset Px)$$
$$Ux(Sx \supset Mx)$$
$$\therefore\ Ux(Sx \supset Px)$$

এতে আছে তিনটি বিধেয় অক্ষর। সুতরাং এমন বিশ্ব নেব যাতে আছে ৮টি ব্যক্তি—ধর, a, b, c, d, e, f, g, h। যদি এই আমাদের বিশ্ব হয় তাহলে উক্ত যুক্তির বক্তব্য

$$(Ma \supset Pa) \cdot (Mb \supset Pb) \cdot (Mc \supset Pc) \cdot (Md \supset Pd) \cdot (Me \supset Pe)$$
$$\cdot (Mf \supset Pf) \cdot (Mg \supset Pg) \cdot (Mh \supset Ph)$$
$$(Sa \supset Ma) \cdot (Sb \supset Mb) \cdot (Sc \supset Mc) \cdot (Sd \supset Md) \cdot (Se \supset Me)$$
$$\cdot (Sf \supset Mf) \cdot (Sg \supset Mg) \cdot (Sh \supset Mh)$$
$$\therefore\ (Sa \supset Pa) \cdot (Sb \supset Pb) \cdot (Sc \supset Pc) \cdot (Sd \supset Pd) \cdot (Se \supset Pe)$$
$$\cdot (Sf \supset Pf) \cdot (Sg \supset Pg) \cdot (Sh \supset Ph)$$

এখন বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের কোনো নির্ণয় পদ্ধতি দিয়ে—যেমন, পূর্ণাঙ্গ সত্যসারণী, পরোক্ষ সত্যসারণী, আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ ইত্যাদির কোনোটি দিয়ে, এ যুক্তির বৈধতা নির্ণয়

*একই প্রশ্ন নানাভাবে উত্থাপন করা হয়েছে।

করতে হবে। যদি যুক্তিটি বৈধ হয় তাহলে মূল বিধেয় যুক্তটি বৈধ। এ বাক্য যুক্তিটির দিকে একটু নজর দিলেই বুঝবে, এরকম ক্ষেত্রে সত্যসারণী ইত্যাদি এমন বিশাল আকার ধারণ করবে যে এসব পদ্ধতিতে এ যুক্তির বৈধতা নির্ণয় দুঃসাধ্য, প্রায় অসম্ভব, ব্যাপার। তাহলে এতক্ষণ ধরে এ পদ্ধতির কথা বললাম কেন? বললাম, একটা তাত্ত্বিক প্রশ্নের উত্তর দিতে গিয়ে। এটা তোমাদের নিশ্চয়ই মনে আছে, প্রশ্নটা ছিল এই: আলোচ্য পদ্ধতিতে কি বৈধতা নির্ণয় বা বৈধতা প্রমাণ সম্ভব?

আমরা বলেছি, প্রমাণ করা হয়েছে: যে যুক্তিতে n সংখ্যক বিধেয় অক্ষর সে যুক্তি যদি 2^n-ব্যক্তিক বিশ্বে বৈধ হয়, তাহলে তা সব সম্ভাব্য বিশ্বেই বৈধ। এতে একটা তাত্ত্বিক প্রশ্নের তাত্ত্বিক উত্তর পাওয়া গেল। এদিক থেকে উক্ত প্রমাণ গুরুত্বপূর্ণ, ঠিক। কিন্তু এ প্রমাণ বা উত্তর ব্যবহারিক দিক থেকে সম্পূর্ণ মূল্যহীন। বিধেয় যুক্তির বৈধতা নির্ণয়ের জন্য আলোচ্য পদ্ধতি প্রয়োগ করা পণ্ডশ্রম। এ কাজের জন্য আমরা অন্য নির্ণয় পদ্ধতির সাহায্য নেব।

অনুশীলনী

নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির অবৈধতা প্রমাণ কর।

(1) $\exists x(Ax \cdot \sim Bx)$
$\exists x(Ax \cdot \sim Dx)$
$\exists x(\sim Bx \cdot Cx)$
$\therefore\ \exists x[Ax \cdot (\sim Bx \cdot Cx)]$

(2) $\mathrm{U}x(Cx \supset Dx)$
$\mathrm{U}x(\sim Cx \supset Ex)$
$\therefore\ \mathrm{U}x(\sim Dx \supset \sim Ex)$

(3) $\mathrm{U}x(Ex \cdot \sim Gx)$
$\mathrm{U}x(Fx \supset Ex)$
$\therefore\ \exists x(Fx \cdot \sim Gx)$

(4) $\mathrm{U}x[(Hx \cdot Ix) \supset Gx]$
$\exists x(Ix \cdot \sim Gx)$
$\exists x(Hx \cdot \sim Gx)$
$\therefore\ \exists x(\sim Hx \cdot \sim Ix)$

(5) $\mathrm{U}x(Jx \supset Ix)$
$\mathrm{U}x(Ix \supset Kx)$
$\therefore\ \exists x(Jx \cdot Kx)$

(6) $Ux[Mx \supset (Nx \supset Jx)]$
$Ux(\sim Lx \supset \sim Jx)$
$\therefore\ Ux[\sim Lx \supset (Mx \vee Nx)]$

(7) $\exists x(Ox \cdot Nx)$
$Ux(\sim Nx \vee \sim Px)$
$\therefore\ Ux(\sim Ox \vee \sim Px)$

(8) $\exists x(Ox \vee \sim Px)$
$Ux[(Ox \cdot \sim Px) \supset Qx]$
$\therefore\ \exists xQx$

(9) $Ux(Qx \supset Rx)$
$Ux(Qx \supset \sim Sx)$
$\therefore\ Ux(Rx \supset \sim Sx)$

(10) $\exists x(Tx \cdot Vx)$
$\exists x(Vx \cdot Ux)$
$\therefore\ \exists x(Tx \cdot Ux)$

(11) $\exists x(Px \cdot Nx)$
$\exists x(Px \cdot \sim Ox)$
$Ux[Mx \supset (Nx \cdot Ox)]$
$\therefore\ Ux(Mx \supset \sim Px)$

(12) $Ux[Qx \supset (Rx \cdot Sx)]$
$\exists x(Tx \cdot Rx)$
$\exists x(Tx \cdot \sim Sx)$
$\therefore\ Ux(Qx \supset Tx)$

(13) $\exists x(Xx \cdot Yx)$
$Ux(Xx \supset Zx)$
$\exists x(Zx \cdot \sim Xx)$
$\therefore\ \exists x(Zx \cdot \sim Yx)$

১০

সত্যশাখী পদ্ধতি

১. ভূমিকা

আমরা এতক্ষণ কেবল প্রমাণ পদ্ধতির কথা বলেছি। এবার বলব একটা নির্ণয় পদ্ধতির কথা। বলব সত্যশাখী পদ্ধতির কথা। এ পদ্ধতির সঙ্গে আমাদের আগেই পরিচয় হয়েছে।* এ পদ্ধতিতে কি করে বাক্য কলনের বাক্য ও যুক্তির বৈধতা নির্ণয় বা প্রমাণ করা যায় তা আমাদের জানা। এটা আমাদের জানা যে, সত্যশাখী পদ্ধতিতে বাক্য বিশ্লেষণের জন্য দরকার এ নিয়মগুলি :

$p \cdot q$
p
q

$p \vee q$
/ \
p q

$\sim(p \cdot q)$
/ \
$\sim p$ $\sim q$

$\sim(p \vee q)$
$\sim p$
$\sim q$

$p \supset q$
/ \
$\sim p$ q

$p \equiv q$
/ \
p $\sim p$
q $\sim q$

$\sim(p \supset q)$
p
$\sim q$

$p \equiv q$
/ \
p $\sim p$
$\sim q$ q

এখন মানকিত বাক্য ও বিধেয় যুক্তির বেলায় আমরা এ পদ্ধতি প্রয়োগ করতে চাই। এজন্য উক্ত নিয়মগুলি ছাড়াও দরকার আরও কয়টি নিয়ম। দরকার

$\mathrm{U}x(\ldots x\ldots)$ $\quad$ $\exists x(\ldots x\ldots)$

$\sim\mathrm{U}x(\ldots x\ldots)$ $\quad$ $\sim\exists x(\ldots x\ldots)$

আকারের বাক্য বিশ্লেষণের নিয়ম। লক্ষণীয়, উক্ত নিয়মগুলি আছে জোড়ায় জোড়ায়। যেমন

$p \cdot q$-এর নিয়ম

$\sim(p \cdot q)$-এর নিয়ম

* সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান : বাক্যকলন, অধ্যায় ১৬ দ্রষ্টব্য।

আমাদের কিন্তু $Ux(\cdots x\cdots)$-এর আবার $\sim Ux(\cdots x\cdots)$-এর, $\exists x(\cdots x\cdots)$-এর আবার $\sim\exists x(\cdots x\cdots)$-এর, নিয়ম দরকার নেই। কেননা, আমরা জানি QE সূত্র অনুসারে সার্বিক-মানকিত ও সাত্তিকমানকিত বাক্যের নিষেধকে যথাক্রমে সাত্তিকমানকিত ও সার্বিকমানকিত বাক্যের আকারে ব্যক্ত করা যায়। তাহলে QE ছাড়া আমাদের দরকার আর দুটো নিয়ম—

$$Ux(\ldots x\ldots)$$
$$\exists x(\ldots x\ldots)$$

আকারের বাক্য বিশ্লেষণের নিয়ম। নিচে এ নিয়ম দুটি ব্যাখ্যা করা হল।

২. UQ
(Rule for the Universal Quantifier)

আমরা জানি সার্বিকমানকিত বাক্য হল আসলে অসীমিত সংযৌগিক। জানি

$$Ux(\cdots x\cdots)$$

এর বক্তব্য হল

$$(\ldots a\ldots)\cdot(\ldots b\ldots)\cdot(\ldots c\ldots)\cdot(\ldots d\ldots)\cdot\ldots\ldots$$

প্রশ্ন হল, সত্যশাখীতে কোনো মুক্ত শাখায়

$$Ux(\cdots x\cdots)$$

আকারের বাক্য পেলে, বাক্যটি বিশ্লেষণ করে, এর নিচে কী লিখব? ওপর থেকে নিচের দিকে পর পর কি লিখতে থাকব

$$\ldots\ldots a\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots b\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots c\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots d\ldots\ldots$$

ইত্যাদি দৃষ্টান্ত? কিন্তু এ লেখার শেষ কোথায়? সংযোগীগুলি ত অসংখ্য। তাহলে? নিচে এর উত্তর দেওয়া হল। দেখবে, বস্তুত দু একটা নির্বাচিত দৃষ্টান্ত নিলেই কাজ হয়ে যায়।

ধর, কোনো সত্যশাখীর কোনো মুক্ত শাখায় আছে

$$Ux(\ldots x\ldots)$$

আকারের বাক্য। তাহলে

> মানকটি বর্জন করে যে মুক্ত বাক্য পেলে তার প্রত্যেকটি গ্রাহকের জায়গায় কোনো ব্যক্তিনাম একরূপ-নিবেশন করে একটা বাক্য গঠন কর, এবং যে বাক্যটি পেলে তা $Ux(\cdots x\cdots)$-এর নিচে লেখ।
>
> ব্যক্তিনাম নির্বাচন করার সময় দেখবে, ঐ শাখায় কোনো ব্যক্তিনাম আছে কিনা। যদি থাকে, তাহলে ঐ নামটিই বেছে নেবে। যদি না থাকে, তাহলে তোমার খুশিমত যে কোনো নাম বেছে নেবে।

এক কথায়,

> Ux(…x…)-এর নিচে লেখ এর কোনো দৃষ্টান্ত—যে দৃষ্টান্ত নিলে স্ববিরোধিতা পাওয়া যায়, ঐ পর্বে বা পরবর্তী পর্বে শাখাপথ বন্ধ করে দেওয়া যায়—সে দৃষ্টান্তই নেবে।

এ প্রসঙ্গে একটা কথা।

Ux(…x…)-এর বামধারে ✓ চিহ্ন দেবে না। কোনো বাক্যের বামধারে ✓ চিহ্ন যুক্ত করলে বলা হয়: এর বিশ্লেষণের কাজ শেষ হয়ে গেল। কিন্তু Ux(…x…) বিশ্লেষণের কাজ কোনো বিশেষ পর্বে শেষ নাও হতে পারে। এ বাক্য থেকে এক পর্বে এক দৃষ্টান্ত, অন্য পর্বে অন্য দৃষ্টান্ত নেবার প্রয়োজন হতে পারে। এবং আমরা যতবার খুশি এবং যখন খুশি Ux(…x…)-এর দৃষ্টান্ত নিতে পারি।

এবার কয়টি উদাহরণ। এগুলিতে UQ-এর প্রয়োগ দেখানো হল।

যুক্তি

	Everything is material,	$UxMx$
∴	this is material.	∴ Ma

শাখী

1.	$UxMx$	P	
2.	$\sim Ma$	~Con	
3.	Ma	1 UQ	[পর্ব 2-এতে আছে ব্যক্তিনাম a, সুতরাং 3-এতে ঐ নামটিই বেছে নেওয়া হল।]
	×		

যুক্তি

	Everything is material,	$UxMx$
∴	something is material.	∴ $\exists xMx$

শাখী

1.	$UxMx$	P	
✓2.	$\sim \exists xMx$	~Con	
3.	$Ux\sim Mx$	2 QE	
4.	Ma	1 UQ	[4-এর আগে কোনো নাম নেই। কাজেই যে কোনো নাম বেছে নিতে পারি। বেছে নিলাম a।]
5.	$\sim Ma$	3 UQ	
	×		

যুক্তি

	All men are mortal,	$Ux(Hx \supset Mx)$
	Socrates is a man ;	Hs
∴	Socrates is mortal.	∴ Ms

শাখী

1.	$Ux(Hx \supset Mx)$	P
2.	Hs	P
3.	$\sim Ms$	~Con
√4.	$Hs \supset Ms$	1 UQ

$$\sim Hs \quad Ms$$
× ×

৩. EQ
(Rule for the Existential Quantifier)

আমরা জানি, সাত্তিকমানকিত বাক্য হল আসলে অসীমিত বৈকল্পিক। জানি

$$\exists x(\ldots x \ldots)$$

-এর বক্তব্য হল

$$(\ldots a \ldots) \vee (\ldots b \ldots) \vee (\ldots c \ldots) \vee (.\ d \ldots) \vee \ \ldots\ \ldots$$

প্রশ্ন হল, সত্যশাখীতে কোনো মুক্ত শাখায়

$$\exists x(\ldots x \ldots)$$

আকারের বাক্য পেলে, বাক্যটি বিশ্লেষণ করে, এর নিচে কী লিখব ? বাম দিক থেকে ডানদিকে পর পর কি লিখব

$$(\ldots a \ldots) \vee (\ldots b \ldots) \vee (\ldots c \ldots) \vee (\ldots d\ ..) \vee \ \ldots\ \ldots$$

ইত্যাদি বিকল্প ? কিন্তু এ রকম বিকল্প ত অসংখ্য। তাহলে ? নিচে এ প্রশ্নের উত্তর দেওয়া হল। দেখবে, নিতে হবে ···x····-এর কোনো একটা দৃষ্টান্ত—একটা বিশেষ ধরণের দৃষ্টান্ত।

ধর, কোনো সত্যশাখীর কোনো মুক্ত শাখায় আছে

$$\exists x(\ldots x \ldots)$$

আকারের বাক্য। তাহলে

> মানকটি বর্জন করে যে মুক্ত বাক্য পেলে তার এমন একটা দৃষ্টান্ত নাও যে দৃষ্টান্তের ব্যক্তিনামটি শাখীটির পূর্ববর্তী কোনো ছত্রে নেই, এবং এ দৃষ্টান্তটি $\exists x(\ldots x \ldots)$-এর নিচে লেখ।

উক্ত অনুজ্ঞাটি আরও সংক্ষেপে এভাবে ব্যক্ত করা যায়—

> শাখীটির-পূর্ববর্তী-কোনো-পর্বে-নেই-এমন ব্যক্তিনাম নিয়ে (···x···)-এর দৃষ্টান্ত গঠন কর, এবং দৃষ্টান্তটি $\exists x(\ldots x \ldots)$-এর নিচে লেখ।

এ প্রসঙ্গে একটা কথা।

দৃষ্টান্ত লেখা হয়ে গেলে $\exists x(\ldots x \ldots)$-এর বাম ধারে অবশ্যই √ চিহ্ন দেবে, কেননা দৃষ্টান্তটি লিখলে $\exists x(\ldots x \ldots)$ বিশ্লেষণের কাজ শেষ হয়ে গেল। মনে রাখবে, EQ

প্রয়োগ করে ···x···-এর কোনো দৃষ্টান্ত, যেমন ···a···, নিলে, পরে অন্য কোনো দৃষ্টান্ত, যেমন ...b..., নেওয়া চলবে না। কেননা, ওপরে নিচে

...a...
...b...

লিখলে বলা হয়

$$(...a..) \cdot (...b...)$$

কিন্তু, আমরা জানি,

$$\exists x(...x...)$$

এর বক্তব্য হল

$$(...a...) \vee (...b...) \vee ....$$

এ প্রসঙ্গে আর একটা কথা।

শাখী গঠন করতে গিয়ে UQ, EQ এ দুটি নিয়মই প্রয়োগ করতে হলে

প্রথমে EQ নিয়ম প্রয়োগ করবে, তারপর UQ।

কেননা প্রথমে UQ দিয়ে দৃষ্টান্ত গঠন করতে যে ব্যক্তিনাম ব্যবহার করবে EQ দিয়ে দৃষ্টান্ত গঠন করতে হলে সে ব্যক্তি-নামটি আর ব্যবহার করা চলবে না। অথচ UQ-এর বেলায় এ "নিষেধ" নেই। প্রথমে EQ প্রয়োগ করতে যে নাম (ধর, a) ব্যবহার করলে, পরে UQ প্রয়োগের বেলায় সে নামটি (a) ব্যবহার করতে কোনো বাধা নেই।

এবার কয়টি উদাহরণ। এগুলিতে EQ (আর UQ)-এর প্রয়োগ দেখানো হল।

যুক্তি

	All men are mortal,		$Ux(Hx \supset Mx)$
	all kings are men ;		$Ux(Kx \supset Hx)$
∴	all kings are mortal.	∴	$Ux(Kx \supset Mx)$

শাখী

1. $Ux(Hx \supset Mx)$
2. $Ux(Kx \supset Hx)$

√3. $\sim Ux(Kx \supset Mx)$
√4. $\exists x \sim (Kx \supset Mx)$
√5. $\sim (Ka \supset Ma)$ 4 EQ

6. Ka
7. $\sim Ma$

√8. $Ha \supset Ma$ 1 UQ

9. $\sim Ha$ Ma
 × (under Ma)

√10. $Ka \supset Ha$ 2 UQ

11. $\sim Ka$ Ha
 × ×

যুক্তি

	All philosophers are wise,	$\mathrm{U}x(Px \supset Wx)$
	some Indians are philosophers,	$\exists x(Ix \cdot Px)$
∴	some Indians are wise.	∴ $\exists x(Ix \cdot Wx)$

শাখী

1. $\mathrm{U}x(Px \supset Wx)$
√2. $\exists x(Ix \cdot Px)$
√3. $\sim\exists x(Ix \cdot Wx)$
4. $\mathrm{U}x\sim(Ix \cdot Wx)$
√5. $Ia \cdot Pa$ — 2 EQ
6. Ia
7. Pa
√$\sim(Ia \cdot Wa)$ — 4 UQ
$\sim Ia$ ＼ $\sim Wa$
× ＼ √$Pa \supset Wa$ — 1 UQ
$\sim Pa$ ＼ Wa
× ＼ ×

যুক্তি

	All leftists are communists,	$\mathrm{U}x(Lx \supset Cx)$
	some teachers are not communists ;	$\exists x(Tx \cdot \sim Cx)$
∴	some teachers are not leftists.	∴ $\exists x(Tx \cdot \sim Lx)$

শাখী

1. $\mathrm{U}x(Lx \supset Cx)$
√2. $\exists x(Tx \cdot \sim Cx)$
√3. $\sim\exists x(Tx \cdot \sim Lx)$
4. $\mathrm{U}x\sim(Tx \cdot \sim Lx)$
√5. $Ta \cdot \sim Ca$ — 2 EQ
6. Ta
$\sim Ca$
√$La \supset Ca$ — 1 UQ
$\sim La$ ＼ Ca
＼ ×
√$\sim(Ta \cdot \sim La)$ — 4 UQ
$\sim Ta$ ＼ La
× ＼ ×

৪. EQ আর UQ সম্পর্কে একটা গুরুত্বপূর্ণ কথা

সত্যশাখী গঠন করার সময় এ কথাটা মনে রাখবে। EQ আর UQ প্রয়োগ করা যায় কেবল সাত্তিকমানকিত আর সার্বিকমানকিত বাক্যের বেলায়।

এর থেকে বোঝা যাবে

(১) যদি কোনো সমগ্র বাক্য $Ux(\cdots x \cdots)$ বা $\exists x(\cdots x \cdots)$ আকারের হয় কেবল তাহলেই নিয়ম দুটি প্রয়োগ করা যাবে, নতুবা নয়।

ধর, $Ux(\cdots x \cdots)$ বা $\exists x(\cdots x \cdots)$ কোনো বাক্যের অংশ। তাহলে কিন্তু অঙ্গবাক্য $Ux(\cdots x \cdots)$ বা $\exists x(\cdots x \cdots)$-এর বেলায় এ নিয়মগুলি প্রযোজ্য নয়।

উদাহরণ

$$Ux(Fx \supset Fa) \qquad \text{(i)}$$
$$UxFx \supset Fa \qquad \text{(ii)}$$

এ বাক্য দুটির পার্থক্য লক্ষ কর। (i)-এর বেলায় UQ প্রয়োগ করতে পারি। এর থেকে পেতে পারি

$$Fa \supset Fa$$
$$Fb \supset Fa$$
$$Fc \supset Fa$$

ইত্যাদি। কিন্তু (ii)-এতে UQ প্রয়োগ করা যাবে না, কেননা, সমগ্র (ii) $Ux(\cdots x \cdots)$ আকারের বাক্য নয়, সার্বিকমানকিত বাক্য নয়। প্রসঙ্গত, (ii)-কে বিশ্লেষণ করতে হবে এভাবে

$$UxFx \supset Fa$$
$$\sim UxFx \qquad Fa$$
$$\exists x \sim Fx$$

আমরা বলেছি, EQ আর UQ প্রয়োগ করা যায় কেবল সাত্তিকমানকিত আর সার্বিক-মানকিত বাক্যের বেলায়।

এর থেকে বোঝা যায়

(২) $\sim Ux(\cdots x \cdots)$ আর $\sim \exists x(\cdots x \cdots)$-এর বেলায় এ নিয়ম প্রযোজ্য নয়।

কেননা এরকম বাক্য হল নিষেধক বাক্য, সার্বিকমানকিত বা সাত্তিকমানকিত বাক্য নয়।

উদাহরণ

$$\sim Ux(Fx \supset Gx) \qquad \text{(iii)}$$
$$\sim \exists x(Gx \cdot Hx) \qquad \text{(iv)}$$

এখানে (iii) আর (iv)-এর বেলায় UQ বা EQ প্রয়োগ করা চলবে না। QE প্রয়োগ করে এদের যথাক্রমে

$$\exists x \sim (Fx \supset Gx) \quad \text{(iii')}$$
$$\mathrm{U}x \sim (Gx \cdot Hx) \quad \text{(iv')}$$

-এতে রূপান্তরিত করে নিতে হবে। এখন (iii') আর (iv') যথাক্রমে $\exists x(\cdots x \cdots)$ ও $\mathrm{U}x(\cdots x \cdots)$ আকারের বাক্য। কাজেই এগুলিতে EQ আর UQ প্রয়োগ করতে বাধা নেই।

৫. সত্যশাখী ও বাক্যের বৈধতা অবৈধতা নির্ণয়

সত্যশাখী দিয়ে কি করে যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা করতে হয় তা দেখেছি। এটা সহজবোধ্য যে সত্যশাখী গঠন করে বাক্যেরও বৈধতা অবৈধতা নির্ণয় করা যায়। দু একটা উদাহরণ।

বাক্য

$$\mathrm{U}x(Fx \vee \sim Fx)$$

শাখী

√1.	$\sim \mathrm{U}x(Fx \vee \sim Fx)$	
√2.	$\exists x \sim (Fx \vee \sim Fx)$	
√3.	$\sim (Fa \vee \sim Fa)$	2 EQ
	$\sim Fa$	
	Fa	
	×	

বাক্য

$$\mathrm{U}xFx \vee \mathrm{U}x \sim Fx$$

শাখী

√1.	$\sim [\mathrm{U}xFx \vee \mathrm{U}x \sim Fx]$	
√2.	$\sim \mathrm{U}xFx$	
√3.	$\sim \mathrm{U}x \sim Fx$	
√4.	$\exists x \sim Fx$	2 QE
√5.	$\exists xFx$	3 QE
6.	$\sim Fa$	4 EQ
7.	Fb	5 EQ

[পর্ব 6-এতে '*a*' ব্যবহার করা হয়েছে, সুতরাং পর্ব 7-এতে '*a*' ব্যবহার করা গেল না।]

স্পষ্টতই বাক্যটি অবৈধ।

বাক্য

$Ux[\ (Fx \supset Gx) \supset Hx\ ] \supset Ux[\ Fx \supset (Gx \supset Hx)\ ]$

শাখী

$\surd 1.\ \sim\{ Ux[(Fx \supset Gx) \supset Hx] \supset Ux[Fx \supset (Gx \supset Hx)] \}$

$2.\quad Ux[(Fx \supset Gx) \supset Hx]$

$\surd 3.\quad \sim Ux[Fx \supset (Gx \supset Hx)]$

$\surd 4.\quad \exists x \sim [Fx \supset (Gx \supset Hx)]$

$\surd 5.\quad \sim[Fa \supset (Ga \supset Ha)]$

Fa

$\surd \sim (Ga \supset Ha)$

Ga

$\sim Ha$

$\surd (Fa \supset Ga) \supset Ha$ 2 UQ

$\surd \sim (Fa \supset Ga)$ | Ha
Fa | ×
$\sim Ga$
×

আর কয়টি উদাহরণ।

উদাহরণ ১

বাক্য

$[\ (UxFx \vee Ga) \cdot \sim Ga\ ] \supset Fa$

শাখী

$\surd\ \sim\{ [(UxFx \vee Ga) \cdot \sim Ga] \supset Fa \}$

$\surd\quad (UxFx \vee Ga) \cdot \sim Ga$

$\sim Fa$

$\surd UxFx \vee Ga$

$\sim Ga$

$UxFx$ | Ga
Fa | ×
×

উদাহরণ ২

যুক্তি

$\exists x(Fx \vee Gx)$

$Ux(Gx \supset Hx)$

$\therefore\ \exists xHx$

শাখী

$$
\begin{array}{c}
\checkmark \exists x(Fx \vee Gx) \\
\mathrm{U}x(Gx \supset Hx) \\
\checkmark \sim \exists xHx \\
\mathrm{U}x \sim Hx \\
Fa \vee Ga \\
\sim Ha \\
\diagup \quad \diagdown \\
Fa \qquad\qquad Ga \\
\checkmark Ga \supset Ha \qquad \checkmark Ga \supset Ha \\
\diagup \diagdown \qquad\qquad \diagup \diagdown \\
\sim Ga \quad Ha \qquad \sim Ga \quad Ha \\
\quad \times \qquad\quad \times \quad\; \times
\end{array}
$$

যুক্তিটি অবৈধ।

উদাহরণ ৩

যুক্তি

$$
\begin{array}{l}
\mathrm{U}x(Fx \supset Gx) \\
\exists xGx \\
\therefore \; \exists xFx
\end{array}
$$

শাখী

$$
\begin{array}{c}
\mathrm{U}x(Fx \supset Gx) \\
\checkmark \; \exists xGx \\
\checkmark \sim \exists xFx \\
\mathrm{U}x \sim Fx \\
Ga \\
\sim Fa \\
\checkmark Fa \supset Ga \\
\diagup \quad \diagdown \\
\sim Fa \qquad Ga
\end{array}
$$

যুক্তিটি অবৈধ।

অনুশীলনী

১. সত্যশাখী গঠন করে প্রমাণ কর যে—

(i) নিম্নোক্ত যুক্তিগুলি বৈধ :

$Pa \quad \therefore \; \exists xPx$

$\exists xPx, \; \mathrm{U}x(Px \supset Qx) \quad \therefore \; \exists xQx$

(ii) নিম্নোক্ত প্রত্যেক জোড়ের বাক্য দুটি সমার্থক ঃ

$\mathrm{U}xPx$	$\exists xPx$
$\sim\exists x\sim Px$	$\sim\mathrm{U}x\sim Px$

$\exists x(Px \vee Qx)$	$\mathrm{U}x(Px \cdot Qx)$
$\exists xPx \vee \exists xQx$	$\mathrm{U}xPx \cdot \mathrm{U}xQx$

(iii) নিম্নোক্ত প্রত্যেকটি বাক্য স্বতসত্য :

$[\mathrm{U}x(Mx \supset Ma) \cdot \sim Ma] \supset \sim\exists xMx$

$\mathrm{U}x(Ax \supset Bx) \supset [\exists xAx \equiv \exists xBx]$

—Jeffrey

২. সত্যশাখী গঠন করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা বিচার কর ঃ

$\mathrm{U}xSx \supset Hb, \ \sim Hb \quad \therefore \quad \sim\exists xSx$

$\exists y(Ty \vee Qy) \quad \therefore \quad Ty \vee \exists xQx$

$\exists xLx, \ \mathrm{U}x(Lx \supset Sx) \quad \therefore \quad \exists xSx$

$\mathrm{U}xLx \cdot \mathrm{U}yVy \quad \therefore \quad \mathrm{U}z(Lx \cdot Vz)$

—Guttenplan & Tamny

৩. সত্যশাখী গঠন করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা-প্রমাণ দাও।

(1) $\mathrm{U}x(Ax \supset Bx)$

$\exists x(\sim Bx \cdot Cx)$

$\mathrm{U}x(Dx \supset \sim Cx)$

$\therefore \ \exists x \sim(Dx \vee Ax)$

(2) $\exists x(Ax \cdot Cx)$

$\mathrm{U}x[(Ax \cdot Bx) \supset \sim Cx)]$

$\mathrm{U}x[(Ax \cdot \sim Bx) \supset Dx]$

$\therefore \ \exists x(Ax \cdot Dx)$

(3) $\exists x[Ax \cdot (\sim Bx \cdot Cx)]$

$\mathrm{U}x[Ax \supset (Dx \supset Ex)]$

$\mathrm{U}x[(Cx \cdot Fx) \supset Gx]$

$\mathrm{U}x[(\sim Dx \cdot \sim Fx) \supset Bx]$

$\therefore \ \exists x(Ex \vee Gx)$

(4) $\exists xFx$

$\mathrm{U}x[Fx \supset (Gx \vee Hx)]$

$\mathrm{U}x[Fx \supset (Gx \vee Ix)]$

$\therefore \ \exists x[Gx \vee (Hx \cdot Ix)]$

(5) $\mathrm{U}x[Fx \supset (Gx \cdot Hx)]$

$\mathrm{U}x(Hx \supset Ix)$

$\therefore \ \mathrm{U}x[(Fx \vee Hx) \supset Ix]$

৪. সত্যশাখী পদ্ধতিতে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির অবৈধতা প্রমাণ কর ঃ

(1) $\exists x(Cx \cdot Dx)$
$\exists x(Ex \cdot Dx)$
$\therefore \exists x(Ex \cdot \sim Cx)$

(2) $\exists x(Fx \cdot Gx)$
$\exists x(Hx \cdot Gx)$
$\therefore \mathrm{U}x(Hx \supset \sim Fx)$

(3) $\mathrm{U}x(Ox \supset Px)$
$\mathrm{U}x(Ox \supset Qx)$
$\therefore \mathrm{U}x(Qx \supset Px)$

(4) $\exists x(Ix \cdot \sim Jx)$
$\mathrm{U}x(Kx \cdot \sim Jx)$
$\therefore \mathrm{U}x(Kx \supset Ix)$

(5) $\mathrm{U}x(Lx \supset \sim Mx)$
$\mathrm{U}x(Mx \supset Nx)$
$\therefore \mathrm{U}x(Mx \supset \sim Lx)$

৫. সত্যশাখী পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি স্বতসত্য ঃ

(i) $\mathrm{U}x(Fx \supset Gx) \supset (\mathrm{U}xFx \supset \mathrm{U}xGx)$

(ii) $\mathrm{U}x(Fx \supset Gx) \supset (\exists xFx \supset \exists xGx)$

(iii) $\exists x(Fx \cdot Gx) \supset (\mathrm{E}xFx \cdot \exists xGx)$

(iv) $(\mathrm{U}xFx \vee \mathrm{U}xGx) \supset \mathrm{U}x(Fx \vee Gx)$

(v) $(\exists xFx \supset \exists xGx) \supset \exists x(Fx \supset Gx)$

(vi) $(\mathrm{U}xFx \supset \mathrm{U}xGx) \supset \exists x(Fx \supset Gx)$

(vii) $\mathrm{U}x(Fx \equiv Gx) \supset (\mathrm{U}xFx \equiv \mathrm{U}xGx)$

(viii) $\mathrm{U}x(Fx \equiv Gx) \supset (\exists xFx \equiv \exists xGx)$

১১

মানকলিপির সরলীকরণ

১. গ্রাহক প্রতীক বাদ দিয়ে মানকিত বাক্য ব্যক্ত করা

পূর্ববর্তী অধ্যায়ে একটি নির্ণয় পদ্ধতি ব্যাখ্যা করেছি। এখন আরও কয়টি নির্ণয় পদ্ধতির সঙ্গে তোমাদের পরিচয় করিয়ে দিতে চাই। এ কাজটা সহজ হত, যদি যে সংকেত লিপি ব্যবহার করে আসছি তা—মানে, মানকলিপি—একটু সরল করে নেওয়া সম্ভব হত। দেখা যাবে, বস্তুত তা সম্ভব। দেখা যাবে, যে কাজে এ লিপি এতদূর পর্যন্ত ব্যবহার করে আসছি সে কাজের জন্য এ রকম জটিল লিপির প্রয়োজন ছিল না। আরও সরল, সংক্ষিপ্ত, লিপিতে কাজ চলে যেত। আর অগ্রসর হওয়ার আগে আমরা মানকলিপি একটু সরল করে নিতে চাই। কাজেই এ মুহূর্তে আমাদের লক্ষ্য হল মানকলিপির সরলীকরণ।

এ লিপি থেকে আমরা U*x* বাদ দিতে পারি। কেননা, আমরা জানি, সব জাতিবিষয়ক বাক্যকে $\exists x$ বা $\sim\exists x$ দিয়ে ব্যক্ত করা যায়। নিচে *Afg*, *Efg*, *Ifg*, *Ofg*-এর U*x*-হীন সমার্থক দেখানো হল।

	I	II	
Afg	$Ux(Fx \supset Gx)$	$\leftrightarrow\ \sim\exists x\sim(Fx \supset Gx)$	$\leftrightarrow\ \sim\exists x(Fx \cdot \sim Gx)$
Efg	$Ux(Fx \supset \sim Gx)$	$\leftrightarrow\ \sim\exists x\sim(Fx \supset \sim Gx)$	$\leftrightarrow\ \sim\exists x(Fx \cdot Gx)$
Ifg	$\exists x(Fx \cdot Gx)$		$\leftrightarrow\ \exists x(Fx \cdot Gx)$
Ofg	$\exists x(Fx \cdot \sim Gx)$		$\leftrightarrow\ \exists x(Fx \cdot \sim Gx)$

U*x* বাদ দেওয়া গেল। প্রশ্ন হল : একঘেয়ে *x* কি বাদ দেওয়া যায় না? মানকের অংশ, এখানে $\exists x$-এর অংশ, হিসাবে *x*, প্রত্যেক বিধেয় অক্ষরের ডান ধারের *x*, না লিখলে চলে না? যদি আমরা মনে করি যে *x*-গুলি উহ্য আছে, এবং স্পষ্টভাবে *x* গুলি না লিখি এবং নিচেকার প্রত্যেক সারির বামধারের বাক্যের বদলে ডানধারের বাক্য লিখি তাহলে কী অসুবিধা, কী আপত্তি?

III	IV
$\sim\exists x(Fx \cdot \sim Gx)$	$\sim\exists(F \cdot \sim G)$
$\sim\exists x(Fx \cdot Gx)$	$\sim\exists(F \cdot G)$
$\exists x(Fx \cdot Gx)$	$\exists(F \cdot G)$
$\exists x(Fx \cdot \sim Gx)$	$\exists(F \cdot \sim G)$

স্তম্ভ IV-এতে যে সংকেতলিপি ব্যবহার করা হয়েছে তা অবশ্যই আপত্তিকর। $\exists(F \cdot G)$—এ আকারটি নিয়ে আপত্তিটি ব্যাখ্যা করা যাক। এখানে বলা হয়েছে বিধেয় *F* আর *G*

আছে। অথচ আমাদের বক্তব্য ছিল : এমন কোনো বস্তু x আছে যাতে F আর G ধর্ম আছে। এ আপত্তি খণ্ডন করা যায় এভাবে : আমরা এ রকম বাক্য পড়ার সময় x যোগ করে পড়ব, ধরে নেব প্রত্যেকটি বিধেয়ের ডান দিকে এবং মানকের মধ্যে x আছে, কিন্তু বস্তুত x লিখব না। যেমন, আমরা $\exists(F \cdot G)$ পড়ব এভাবে : এমন কিছু আছে যা F এবং G, যাতে F এবং G ধর্ম আছে। এ সংকেতলিপিতে জাতিবিষয়ক বাক্য অনেক সহজে ব্যক্ত করা যায়।

২. অনেকমানক বাক্য ও গ্রাহক প্রতীক

নামগ্রাহক x (y বা z) উহ্য রাখার বিরুদ্ধে একটা গুরুতর আপত্তি। এ আপত্তির কথা বলার আগে একমানক বাক্য ও অনেকমানক বাক্যের পার্থক্যের কথা বলে নেওয়া দরকার। যে মানকিত বাক্যের সঙ্গে আমাদের পরিচয় হয়েছে সেগুলি একমানক বাক্য— যাতে থাকে কেবল একটি মানক। এবার নিচের বাক্যগুলি লক্ষ কর :

$$\exists xFx \supset \mathrm{U}y(Gy \supset Hy) \quad *$$
$$\mathrm{U}xFx \supset \mathrm{U}y(Gy \supset \sim Hy) \, **$$

এগুলি অনেকমানক বাক্যের দৃষ্টান্ত। y ব্যবহার না করে, কেবল x দিয়েও বাক্যগুলি ব্যক্ত করা যেত। এবং তাহলে আমাদের প্রস্তাবিত সংকেতলিপিতে এ বাক্যগুলি যথাক্রমে এ আকার ধারণ করত :

$$\exists F \supset \mathrm{U}(G \supset H) \quad \text{বা} \quad \exists F \supset \sim\exists(G \cdot \sim H)$$
$$\mathrm{U}F \supset U(G \supset \sim H) \text{ বা } \sim\exists\sim F \supset \sim\exists(G \cdot H)$$

কিন্তু কেবল একটি নামগ্রাহক x দিয়ে সব অনেকমানক বাক্য ব্যক্ত করা যায় না। সুতরাং ও রকম ক্ষেত্রে আমাদের প্রস্তাবিত সংকেতলিপিও অচল। একটা উদাহরণ। আমরা জানি, সংকেতলিপিতে

At least one thing is F, বা
There is at least one thing which is F

এ বাক্য ব্যক্ত করতে হয় এভাবে

$$\exists xFx$$

বা আমাদের প্রস্তাবিত লিপিতে এভাবে

$$\exists F$$

এখন

There are at least two things which are F (1)

এ বাক্যটির সাংকেতিক রূপ কী হবে ? ধর, এ বাক্য সংকেতলিপিতে ব্যক্ত করা হল এভাবে

$$\exists xFx \cdot \exists xFx \quad (2)$$

---

* If something is F then every G is H
** If everything is F then no G is H

কিন্তু (2) দিয়ে কি (1)-কে নির্ভুলভাবে সংকেতায়িত করা হল ? না, হল না। যেমন $p \quad p$ সম p, তেমনি (2) সম $\exists x Fx$। (2)-তেও বলা হয়: At least one thing is F। (1)-কে নির্ভুলভাবে ব্যক্ত করা যায়, যদি মানক হিসাবে কেবল $\exists x$ না নিয়ে, $\exists y$, $\exists z$ প্রভৃতির সাহায্য নেওয়া হয়। যেমন (1)-কে এভাবে সংকেতায়িত করতে পারি

$$(\exists x)Fx \cdot (\exists y)Fy \tag{3}$$

এতে বলা হল: কোনো একটা জিনিষ x হল F, আর কোনো একটা জিনিষ y হল F। এ দুটো জিনিষ—x, y-যে ভিন্ন তা কিন্তু এখনও ঠিক বলা হল না। এ কথাটা স্পষ্ট করে বলার দরকার যে x আর y এক নয়, ভিন্ন জিনিষ: বলার দরকার $x \neq y$। তাহলে (1)-এর সাংকেতিক রূপ হবে এমন:

$$\exists x[Fx \cdot \exists y(Fy \cdot x \neq y)] \text{ বা}$$
$$\exists x \exists y(Fx \cdot Fy \cdot x \neq y)$$

দেখ, x, y বাদ দিয়ে এ রকম বাক্যের সংক্ষেপকরণ সম্ভব নয়।

৩. বুলীয় পদ ও বুলীয় বাক্য

আমরা মানকলিপি সরল করার প্রস্তাবটা বিবেচনা করলাম। দেখা গেল, x, y সব ক্ষেত্রে বাদ দেওয়া যায় না, কাজেই আমাদের প্রস্তাবিত মানকলিপিও সব ক্ষেত্রে চলে না। তবে বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানের যে প্রাথমিক অংশের উপকরণ কেবল একমানক বাক্য সে অংশে মানকলিপির সংক্ষেপকরণ সম্ভব, সে অংশে x বাদ দিয়ে মানকিত বাক্য (একমানক বাক্য) ব্যক্ত করা যায়। আমরা A, E, I, O এভাবে লিখতে পারি।

IV

Afg	$\sim\exists(F \cdot \sim G)$
Efg	$\sim\exists(F \cdot G)$
Ifg	$\exists(F \cdot G)$
Ofg	$\exists(F \cdot \sim G)$

আরও একটু সংক্ষেপকরণ সম্ভব। বিধেয়ের নিষেধকে '~' দিয়ে ব্যক্ত না করে মাত্রা (bar) দিয়ে ব্যক্ত করতে পারি। যেমন

$(F \cdot \sim G)$-এর বদলে লিখতে পারি $(F \cdot \bar{G})$

স্তম্ভ IV-এর বাক্যগুলি আরও সংক্ষেপে ব্যক্ত করা যায়। বীজগণিতে, বুলীয় যুক্তিবিজ্ঞানে, সংযোগ, গাণিতিক গুণফল বা শ্রেণী গুণফল কিভাবে ব্যক্ত করা হয়, দেখ:

$a \times b$-এর বদলে লেখা হয়: ab

$S \times \bar{P}$-এর বদলে লেখা হয়: $S\bar{P}$

কেউ কেউ বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানেও এ কৌশল অবলম্বন করেন, সংযৌগিক বাক্য ব্যক্ত করেন এ কায়দায়। যেমন

$p \cdot q$-এর বদলে লেখেন : pq

আমরাও বিধেয় প্রতীকের মাঝখানের বিন্দু বাদ দেব, সংযোগ বোঝাব কেবল বিধেয় অক্ষরগুলি পরপর পাশাপাশি লিখে। যেমন

$\exists(F \cdot \sim G)$-এর বদলে লিখব : $\exists(F\bar{G})$

আবার, এরকম ক্ষেত্রে বন্ধনী বাদ দেব, যেমন

$\exists(F\bar{G})$-এর বদলে লিখব : $\exists F\bar{G}$

তবে বিধেয় অক্ষরের মধ্যে বিন্দু ভিন্ন অন্য কোনো যোজক, যথা v, থাকলে অবশ্যই বন্ধনীর দরকার হবে। যেমন

$\exists[F(G \vee H)]$

-এর বেলায় বন্ধনী বাদ দেওয়া চলবে না। যে সংকেতলিপির কথা বলা হল সে লিপিতে জাতিবিষয়ক বাক্য কী রূপ ধারণ করে তা নিচে দেখানো হল

	IV	V
Afg	$\sim\exists(F \cdot \sim G)$	$\sim\exists F\bar{G}$
Efg	$\sim\exists(F \cdot G)$	$\sim\exists FG$
Ifg	$\exists(F \cdot G)$	$\exists FG$
Ofg	$\exists(F \cdot \sim G)$	$\exists F\bar{G}$

স্তম্ভ V-এতে যে সব বাক্য, ঐ জাতীয় বাক্যকে বুলীয় বাক্য বলে অভিহিত করা হয়। আর এ জাতীয় বাক্যের $\exists$, $\sim\exists$-এর পরবর্তী অংশকে বলা হয় বুলীয় পদ।

কেন FG, $F\bar{G}$ ইত্যাদিকে বুলীয় পদ আর $\exists FG$, $\sim\exists FG$ ইত্যাদিকে বুলীয় বাক্য বলে, তা বুঝতে পারবে যদি V-এর বাক্যের সঙ্গে *Afg*, *Efg* ইত্যাদির প্রচলিত এবং বুল্‌-প্রদত্ত রূপের তুলনা কর। নিচে এদের পাশাপাশি দেখানো হল।

	V	VI
Afg	$\sim\exists F\bar{G}$	$F\bar{G}=0$
Efg	$\sim\exists FG$	$FG=0$
Ifg	$\exists FG$	$FG\neq 0$
Ofg	$\exists F\bar{G}$	$F\bar{G}\neq 0$

[বলা বাহুল্য, স্তম্ভ VI-এতে আছে বুল-প্রদত্ত রূপ— বুলীয় সমীকরণ ও অসমীকরণ]

V আর VI-এর বাক্যগুলি (ছত্র ধরে ধরে) তুলনা কর। দেখবে এদের মধ্যে পদের দিক থেকে কোনো পার্থক্য নেই ; যেমন সর্বশেষ ছত্রে দুটি বাক্যেই আছে : $F\bar{G}$। এদের পার্থক্য কেবল এই :

VI-এতে যেখানে$\cdots=0$, V-এতে সেখানে $\sim\exists\cdots$

VI-এতে যেখানে$\cdots\neq 0$, V-এতে সেখানে $\exists\cdots$

বলা বাহুল্য, এ পার্থক্যের কোনো যৌক্তিক তাৎপর্য নেই—এ পার্থক্য হল কেবল সংকেত-লিপির পার্থক্য।

$\cdots=0$ দিয়ে বলা হয় : অমুক শ্রেণীটি শূন্য, বা
অমুক রকমের বস্তু নেই (১)

$\sim\exists\cdots$ দিয়ে বলা হয় : এমন নয় যে অমুক রকমের বস্তু আছে, বা
অমুক রকমের বস্তু নেই (১')

$\cdots\neq 0$ দিয়ে বলা হয় : অমুক শ্রেণীটি শূন্য নয়, বা
অমুক রকমের বস্তু আছে (২)

$\exists\cdots$ দিয়েও বলা হয় : অমুক রকমের বস্তু আছে (২')

যথা

$FG\neq 0$-এর বক্তব্য : এমন বস্তু আছে যা FG
$\exists FG$-এর বক্তব্য : ঐ
$FG=0$-এর বক্তব্য : এমন বস্তু নেই যা FG
$\sim\exists FG$-এর বক্তব্য : এমন নয় যে—এমন বস্তু আছে যা FG, বা
এমন বস্তু নেই যা FG

স্তম্ভ V আর VI-এর বাক্য সম্বন্ধে আর একটা কথা। আমরা স্তম্ভ V-এর বাক্যগুলিকে বুলীয় বাক্য বলে অভিহিত করেছি। আসলে স্তম্ভ VI-এর বাক্যগুলিও বুলীয় বাক্য বলে গণ্য, কেননা বুল্ নিজে জাতিবিষয়ক বাক্যকে এভাবে ব্যক্ত করেছেন। VI-এর বাক্যগুলির সঙ্গে পার্থক্য করার জন্য আমরা V-এর বাক্যগুলিকে মানকলিপিতে-লেখা বুলীয় বাক্য বলতে পারি। তবে তার দরকার নেই। বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানে আমরা বুল-উদ্ভাবিত $=0$ $\neq 0$—এ সংকেতলিপি ব্যবহার করব না। কাজেই "বুলীয় বাক্য" এ কথাটি দিয়ে কেবল $\exists\cdots$, $\sim\exists\cdots$ আকারের বাক্য বোঝালে কোনো অসুবিধা হওয়ার কথা নয়। এখন থেকে আমরা বুলীয় বাক্য বলতে স্তম্ভ V-এতে যে বাক্য সে জাতীয় বাক্য বুঝব।

বলা বাহুল্য, বুলীয় বাক্য দু রকম : $\exists\cdots$ আকারের বাক্য ও $\sim\exists\cdots$ আকারের বাক্য, ভাববাচক বুলীয় বাক্য ও অভাববাচক বুলীয় বাক্য।

ভাববাচক বুলীয় বাক্যের অন্য নাম বুলীয় সত্ত্বাবাক্য।

যেমন

$$\exists FG,\ \exists FG\bar{H},\ \exists(F \vee G),\ \exists[F(G \vee H)]$$

এসব বুলীয় সত্ত্ব বাক্য।

আর

$$\sim\exists FG,\ \sim\exists F\bar{G},\ \sim\exists(F \vee G)$$

এসব বুলীয় সত্ত্ববাক্যের নিষেধ।

II, V, VI-এর বাক্যগুলি আবার পাশাপাশি লেখা হল।

II	V	VI
$Ux(Fx \supset Gx)$	$\sim \exists F\bar{G}$	$F\bar{G} = 0$
$Ux(Fx \supset \sim Gx)$	$\sim \exists FG$	$FG = 0$
$\exists x(Fx \cdot Gx)$	$\exists FG$	$FG \neq 0$
$\exists x(Fx \cdot \sim Gx)$	$\exists F\bar{G}$	$F\bar{G} \neq 0$

স্তম্ভ V-এতে যে সংকেতলিপি ব্যবহার করা হয়েছে, আমরা এখন থেকে জাতিবিষয়ক বাক্যকে সে লিপিতে ব্যক্ত করব। জাতিবিষয়ক বাক্যে এ সাংকেতিক রূপ দেওয়া সহজ হবে যদি এ বিধানটি মেনে চল।

> প্রথমে প্রদত্ত বাক্যকে পূর্বপরিচিত বুলীয় সমীকরণ অসমীকরণের আকারে ব্যক্ত করবে, তারপর
>
> বুলীয় পদের ডানধারের $=0$ বর্জন করে পদটির বামে $\sim \exists$ লিখবে,
>
> আর ডানধারের $\neq 0$ বর্জন করে পদটির বামে $\exists$ লিখবে।

৪. প্রস্তাবিত সংকেতলিপির সুবিধা

একটা প্রশ্ন। প্রচলিত মানকলিপি (x), Ux, $(\exists x)$, $\exists x$ এসব দিয়ে যে লিপি তা, ছেড়ে আমরা নতুন সংকেতলিপির প্রস্তাব করছি কেন, সব বিধেয় বাক্যকে বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের (বা তার নিষেধের) আকারে ব্যক্ত করতে চাইছি কেন? এর একটা উত্তর তোমরা নিজেরাই দিতে পারবে। চাইছি এজন্য: শেষোক্ত সংকেতলিপিতে বাক্য সংকেতায়িত করা যায় অনেক সংক্ষেপে—এ লিপিতে কম জায়গা লাগে, কম সময় লাগে। উদাহরণ

$$\exists x[(Fx \cdot Gx) \vee (Fx \cdot \sim Gx) \vee (\sim Fx \cdot Gx) \vee (\sim Fx \cdot \sim Gx)]$$

প্রস্তাবিত লিপিতে এ বাক্য ব্যক্ত করতে হবে এভাবে

$$\exists (FG \vee F\bar{G} \vee \bar{F}G \vee \bar{F}\bar{G})$$

এবার একটা যুক্তি (-আকার)—প্রথম সংস্থানে AII :

$$Ux(Mx \supset Px), \exists x(Sx \cdot Mx) \therefore \exists x(Sx \cdot Px)$$

নতুন লিপিতে এ যুক্তির সাংকেতিক রূপ হবে :

$$\sim \exists M\bar{P}, \exists SM \therefore \exists SP$$

কেবল জায়গা বাঁচানো আর সময় সংক্ষেপের কথা ভেবেই যে আমরা নতুন সংকেতলিপি ব্যবহারের প্রস্তাব করছি, তা নয়। করছি একটা বিশেষ উদ্দেশ্যে। প্রচলিত-মানকলিপিতে-লেখা বাক্যের বা যুক্তির বৈধতা নির্ণয় একটা দুঃসাধ্য ব্যাপার। আমরা বিধেয় বাক্যকে এমনভাবে ব্যক্ত করতে চাই যাতে বিধেয় বাক্যের বা বিধেয় যুক্তির বৈধতা

নির্ণয় সহজ হয়। আমরা চাই বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানে যে সব নির্ণয় পদ্ধতি প্রয়োগ করা হয় সেগুলি দিয়েই বিধেয় বাক্য ও বিধেয় যুক্তির বৈধতা নির্ণয় করতে। দেখা যাবে, আমরা যে সংকেতলিপি প্রস্তাব করছি সে-লিপিতে লিখলে বাক্য-যুক্তিবিজ্ঞানে-ব্যবহৃত নির্ণয় পদ্ধতি—যেমন সত্যসারণী, আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ ইত্যাদি—বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানে প্রয়োগ করা যায়।

আমরা জানি, বাক্য-যুক্তিবিজ্ঞানের-আলোচ্য বাক্যের প্রধান বৈশিষ্ট্য হল—ওগুলি সব সত্যাপেক্ষ বাক্য : p, q ইত্যাদির সত্যমূল্য জানা থাকলে $\sim p, p \supset q, p \vee q, p \equiv q$ —এ জাতীয় বাক্যের সত্যমূল্য অতি সহজে (যান্ত্রিকভাবে) নির্ণয় করা যায়। এ কথা ঠিক যে, বিধেয় বাক্যে সত্যাপেক্ষ যোজক $\sim, \supset, \vee$ ইত্যাদি ব্যবহার করা হয়। কিন্তু তা হলেও বিধেয় বাক্য যে সত্যাপেক্ষ বাক্য তা স্পষ্ট হয়ে দেখা দেয় না। এ জাতীয় বাক্যের সত্যতা নির্ণয়, বা বিধেয় যুক্তির বৈধতা নির্ণয়, করা সহজ নয়। উদাহরণ হিসাবে

$$[(p \supset q) \cdot \sim q] \supset \sim p \qquad (১)$$

এ বাক্যের সঙ্গে

$$[\mathrm{U}x\, Mx \supset Px) \cdot \exists x(Sx \cdot Mx)] \supset \exists x(Sx \cdot Px)] \qquad (২)$$

-এর তুলনা করা যাক। সত্যসারণী গঠন করে সহজেই বলে দেওয়া যায়, (১) স্বতসত্য বাক্য। কিন্তু (২) কি সত্য ? এ বাক্য স্বতসত্য না পরতসাধ্য (না স্বতমিথ্যা), সুতরাং

$$\mathrm{U}x(Mx \supset Px), \exists x(Sx \cdot Mx) \quad \therefore \quad \exists x(Sx \cdot Px)$$

বৈধ না অবৈধ, তা কি করে নির্ণয় করব ?

দেখতে পাবে, কোনো বিধেয় বাক্যকে বুলীয় সত্তবাক্য হিসাবে ব্যক্ত করলে সহজে এর সত্যতা নির্ণয় করা যায়। কিন্তু অন্য আকারের বিধেয় বাক্যের সত্যতা নির্ণয় এত সহজ নয়। উদাহরণ হিসাবে

$$\mathrm{U}x(Fx \supset Gx) \text{ বা } \mathrm{U}(F \supset G) \qquad (1)$$

এ বাক্যের সঙ্গে

$$\exists FG, \exists F\bar{G}, \exists FGH \qquad (2)$$

এ জাতীয় বাক্যের, বুলীয় সত্ত বাক্যের, তুলনা কর। আমরা জানি (1) হল আসলে একটা অসীমিত সংযৌগিক, এর বক্তব্য :

$$(Fa \supset Ga) \cdot (Fb \supset Gb) \cdot (Fc \supset Gc) \cdot (Fd \supset Gd) \;\ldots\ldots\ldots$$

এরূপ বাক্য—(1)-এর মত বাক্য—যে সত্য তা দেখানো খুব শক্ত। বস্তুত এ জাতীয় বাক্যের সত্যতা প্রমাণ সম্ভব নয়। কিন্তু (2)-এর অন্তর্গত বাক্যগুলি অন্যরূপ। এ বাক্যগুলির সত্যতা দেখানো খুব সহজ। যেমন, যদি দেখানো যায় যে, কোনো কিছু F এবং G তাহলে দেখানো হল $\exists FG$ সত্য।

এবার একটা যৌগিক বাক্য নাও যার অঙ্গগুলি বিধের বাক্য। ধর, বাক্যটিকে

$\exists$ক v $\exists$খ v $\exists$গ

($\exists$ক v $\exists$খ) · ($\exists$গ v $\exists$ঘ)

$\exists$ক $\supset$ ($\exists$ক v $\exists$খ)

এ জাতীয় কোনো আকারে ব্যক্ত করা গেল। স্পষ্টতই এ আকারগুলি সত্যাপেক্ষ আকার। দেখা যাবে, সত্যাপেক্ষ যুক্তিবিজ্ঞানে বা বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানে ব্যবহৃত পদ্ধতি দিয়েই এ জাতীয় বাক্যের বৈধতা অবৈধতা নির্ণয় করা যায়।

অনুশীলনী

নিম্নোক্ত বাক্যগুলিকে, বা নিম্নোক্ত প্রত্যেকটি যুক্তির অঙ্গবাক্যগুলিকে, বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের বা বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের নিষেধের, আকারে ব্যক্ত কর।

(ক) $Ux(\sim Fx \supset \sim Gx)$

(খ) $\exists x(\sim Fx \cdot \sim Gx)$

(গ) $Ux[(Fx \cdot Gx) \supset Fx]$

(ঘ) $\exists x[(Fx \supset (Fx \vee Gx)]$

(ঙ) $Ux(Fx \supset Hx)$
$Ux(Gx \supset Fx)$
$\therefore\ Ux(Gx \supset Hx)$

(চ) $Ux(Fx \supset Hx)$
$\exists x(Gx \cdot Fx)$
$\therefore\ \exists x(Gx \cdot Hx)$

(ছ) $Ux[(Gx \cdot Hx) \supset Ix]$
$Ux[Gx \supset (Ix \vee Hx)]$
$\therefore\ Ux(Gx \supset Ix)$

১২

সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি

১. ভূমিকা

আমরা বিধেয় বাক্য ও বিধেয় যুক্তির বৈধতা নির্ণয় পদ্ধতি আলোচনা করতে যাচ্ছি। এ বিভাগে যে পদ্ধতিটি আলোচনা করা হবে কোয়াইন্‌ তার নাম দিয়েছেন সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি।* এ পদ্ধতি আলোচনার ভূমিকা হিসাবে কয়েকটা কথা বলে নেওয়া দরকার।

(১) সত্ত্ব প্রাকল্পিক বাক্য

> যে প্রাকল্পিক বাক্যের অনুকল্প একটি সত্ত্ব বুলীয় বাক্য এবং এর পূর্বকল্প কোনো সত্ত্ব বুলীয় বাক্য বা সত্ত্ব বুলীয় বাক্য দিয়ে গঠিত সংযোগিক বাক্য তাকে বলে সত্ত্ব প্রাকল্পিক বাক্য।

উদাহরণ

$$\exists FG \supset \exists(GH \vee FH)$$
$$(\exists FG \cdot \exists FH) \supset \exists GH$$

আলোচ্য পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হলে সব বিধেয় বাক্যকে সত্ত্ব বুলীয় বাক্যে রূপান্তরিত করা দরকার। এজন্য বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানে স্বীকৃত বিভিন্ন রূপান্তর সূত্র ছাড়াও নিম্নোক্ত সূত্রটির দরকার হবে।

(২) সাত্ত্বিক মানক সঞ্চালন সূত্র

Law of Existential Distribution (LED)

এটা সহজবোধ্য যে,

$\exists(F \vee G)$-এতে যা বলা হয়,

$\exists F \vee \exists G$-এতেও তাই বলা হয়।

ধর, F–বিজ্ঞানী, G–দার্শনিক।

তাহলে

$\exists(F \vee G)$–কোনো কোনো লোক বিজ্ঞানী অথবা দার্শনিক, বা
এমন লোক আছে যে বিজ্ঞানী অথবা দার্শনিক (1)

$\exists F \vee \exists G$–এমন লোক আছে যে বিজ্ঞানী অথবা এমন লোক আছে যে দার্শনিক (2)

---

* Method of Existential Conditionals*

দেখ, (1) আর (2)-এর কোনোটি সত্য হলে অন্যটি মিথ্যা হতে পারে না। বলতে পার, বক্তব্যের দিক থেকে $\exists(F \vee G)$ আর $\exists F \vee \exists G$-এর মধ্যে কোনো পার্থক্য নেই। এক কথায়, এরা সমার্থক। এ কথাটাই সূত্রাকারে বলা হল।

$\exists$(ক v খ) equiv. $\exists$ক v $\exists$খ

এ সূত্রটির নাম Law of Existential Distribution সংক্ষেপে LED, বাংলায়—সাত্তিক মানক সঞ্চালন সূত্র।

আমরা দেখলাম,
বিকল্পের ওপর দিয়ে $\exists$-এর সঞ্চালন হতে পারে।

কিন্তু মনে রাখতে হবে
$\sim\exists$-এর সঞ্চালন হতে পারে না।

মানে

$\sim\exists$(ক v খ) অসম $\sim\exists$ক v $\sim\exists$খ

এরা যে অসম তার প্রমাণ হল এই : এমন হতে পারে—এদের একটি সত্য, অন্যটি মিথ্যা। একটা উদাহরণ

M=মানুষ, G=ভূত [আর, ধর, ভূত বলে কিছু নেই]

তাহলে

$\sim\exists G \vee \sim\exists M$—এ বাক্য সত্য
[একটি বিকল্প, $\sim\exists G$, সত্য বলে]

কিন্তু

$\sim\exists(G \vee M)$—এ বাক্য মিথ্যা
[কেননা $\exists(G \vee M)$ সত্য]

দেখা গেল,

$\sim\exists(G \vee M)$ আর $\sim\exists G \vee \sim\exists M$ অসম।

সুতরাং

বিকল্পের ওপর দিয়ে $\sim\exists$-এর সঞ্চালন অসঙ্গত।

তবে $\sim\exists$-এর '$\sim$' হাতে রেখে দিয়ে এর পরবর্তী $\exists$টি বিকল্পের ওপর দিয়ে সঞ্চালন করা যায়। তার মানে, উক্ত উদাহরণে

$\sim\exists(G \vee M)$ সম $\sim(\exists G \vee \exists M)$

এ কথাটাই বলা হল পরবর্তী সূত্রে।

$\sim\exists$(ক v খ) equiv. $\sim$($\exists$ক v $\exists$খ) (২)

লক্ষণীয়, ডান ধারের বাক্যে '$\sim$' বন্ধনীর বাইরে ; আরও লক্ষণীয় ডান ধারের বাক্যটির সঙ্গে $\sim\exists$ক v $\sim\exists$খ-এর গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। ডি. মরগান সূত্র অনুসারে

$\sim\exists$(ক v $\exists$খ)-এর সমার্থক হল : $\sim\exists$ক · $\sim\exists$খ, $\sim\exists$ক v $\sim\exists$খ নয়

বলা বাহুল্য, ২-ও LED সূত্র বলে গণ্য।

প্রসঙ্গত একটা কথা।

সংযোগীর ওপর দিয়ে $\exists$-এর সঞ্চালন হতে পারে না।

যেমন, এ কথা বলা যায় না যে : $\exists FG$ সম $\exists F \cdot \exists G$।

কেননা

$\exists FG$ থেকে নিঃসৃত হয় : $\exists F \cdot \exists G$

এ কথা ঠিক ; কিন্তু

$\exists F \cdot \exists G$ থেকে নিঃসৃত হয় না যে : $\exists FG$

ধর, F=নীল (বস্তু), G=ঘোড়া

নীল বস্তু আছে [$\exists F$] এবং ঘোড়া আছে [$\exists G$]

-এর থেকে নিঃসৃত হয় না যে—

নীল ঘোড়া আছে [$\exists FG$]।

(৩) বুলীয় পদ প্রসঙ্গে 'বৈধতা', 'প্রতিপত্তি' ইত্যাদি

আমরা বুলীয় পদের বৈধতা অবৈধতার কথা বলব, বলব : এ রকম পদ ও রকম পদকে প্রতিপাদন (imply) করে। পদ প্রসঙ্গে এ রকম কথা উদ্ভট বলে মনে হতে পারে। এবং কেউ এ রকম আপত্তি তুলতে পারে :

সঠিকভাবে বলতে গেলে, বৈধ অবৈধ এসব কথা যুক্তি সম্পর্কেই প্রযোজ্য। তবে বাক্য সম্পর্কে এ কথাগুলি প্রয়োগ করলে আপত্তি করব না : এ বাক্যটি বৈধ মানে বাক্যটি স্বতসত্য, ও বাক্যটি অবৈধ মানে বাক্যটি অ-স্বতসত্য। কিন্তু অমুক পদটি বৈধ—এ রকম কথার মানে কী? পদ আবার বৈধ বা অবৈধ (স্বতসত্য বা অস্বতসত্য) হয় কি করে?

নিচে এ আপত্তির উত্তর দিচ্ছি। আমরা বিরুদ্ধ পদের কথা বলি : যেমন বলি— শ্বেত ও অশ্বেত বিরুদ্ধ পদ। বলি, স্ববিরোধী পদের কথা ; যেমন বলি, 'শ্বেত-এবং-অশ্বেত' স্ববিরোধী পদ। 'বিরুদ্ধ পদ', 'স্ববিরোধী পদ' এসব ব্যবহার যদি মেনে নিতে পার, তাহলে 'বৈধ পদ', 'অবৈধ পদ' সম্পর্কে আপত্তি তুলছ কেন? আসলে সঠিকভাবে বলতে গেলে "বিরুদ্ধ", "স্ববিরোধী"—এসব বিশেষণ বাক্য সম্পর্কেই খাটে, পদ সম্পর্কে খাটে না। যখন বলি দুটি পদ, যথা 'শ্বেত' ও 'অশ্বেত, বিরুদ্ধ তখন আমাদের বক্তব্য হল : একই বস্তু x সম্পর্কে পদ দুটি প্রয়োগ করে যে-দুটি বাক্য পাওয়া যায় তাদের (x হল শ্বেত, x হল অশ্বেত—এ বাক্য দুটির) উভয়ই সত্য হতে পারে না, আবার উভয়ই মিথ্যা হতে পারে না। 'শ্বেত-এবং-অশ্বেত' স্ববিরোধী পদ—এ বাক্যের বক্তব্য হল : যদি কোনো বস্তু x সম্পর্কে পদটি প্রয়োগ করা হয় তাহলে যে বাক্য পাব তা (মানে 'x হল শ্বেত-এবং-অশ্বেত' বা 'x হল শ্বেত · x হল অশ্বেত') স্ববিরোধী, স্বতমিথ্যা।

সেরকম যখন বলা হয় $F \vee \bar{F}$ বৈধ তখন আসলে এ উক্তিই করা হয় : কোনো বস্তু x সম্পর্কে এ বিধেয় প্রয়োগ করলে যে বাক্য পাওয়া যাবে তা [মানে $(F \vee \bar{F})x$] স্বতসত্য বা বৈধ। এটা সহজবোধ্য যে

	$Fx \vee \sim Fx$	বৈধ
কাজেই	$Fx \vee \bar{F}x$	বৈধ
কাজেই	$(F \vee \bar{F})x$	বৈধ

$(F \vee \bar{F})x$ বৈধ। আমরা প্রস্তাব করছি, $F \vee \bar{F}$ আকারের পদ সম্পর্কেই বৈধ বা স্বতসত্য কথাটি প্রয়োগ করব। আমরা দেখেছি, পদের বেলায় "স্ববিরোধী" কথাটি ব্যবহার করতে আমাদের আপত্তি নেই। তাহলে পদের বেলায় "বৈধ" কথাটি ব্যবহারে আপত্তি উঠবে কেন ?

এটাও সহজবোধ্য যে

	$Fx \cdot \sim Fx$	স্ববিরোধী
কাজেই	$Fx \cdot \bar{F}x$	স্ববিরোধী
কাজেই	$(F \cdot \bar{F})x$	স্ববিরোধী
কাজেই	$(F\bar{F})x$	স্ববিরোধী

$(F\bar{F})$ স্ববিরোধী। আমরা জানি, সাধারণত এ আকারের পদকেই স্ববিরোধী পদ বলা হয়। আমরাও এ প্রয়োগ অনুসরণ করব। আবার, আমরা এ রকম কথাও বলব : অমুক পদ তমুক পদকে প্রতিপাদন (imply) করে। এ কথা অবশ্যই বলা যায়

$Fx \cdot Gx$ প্রতিপাদন করে $Fx \vee Gx$-কে

কাজেই বলতে পারি

$(F \cdot G)x$ বা $(FG)x$ প্রতিপাদন করে $(F \vee G)x$-কে

এ রকম ক্ষেত্রে আমরা বলব এমন কথা

FG আকারের পদ প্রতিপাদন করে $(F \vee G)$ আকারের পদকে।

(৪) **F, G, H এসব বিধেয়, আর**
p, q, r ইত্যাদি বাক্য

$F, G, FG, F \vee G$ এসব বিধেয়। কিন্তু ধর, কল্পনা করলাম : এসব যেন বিধেয় নয়, এসব যেন বাক্য—বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের $p, q, p \cdot q, p \vee q$ ইত্যাদি। এ কল্পনা করলে কী ক্ষতি ? লক্ষণীয় এদের মধ্যে একটা আনুরূপ্য আছে। নিচের সারণীতে এ আনুরূপ্যের উদাহরণ দেওয়া হল।

$F \vee \bar{F}$ বৈধ	$p \vee \sim p$ বৈধ, $p \vee \bar{p}$ বৈধ
$F\bar{F}$ স্ববিরোধী	$p \cdot \sim p$ স্ববিরোধী, $p\bar{p}$ স্ববিরোধী
$(FG) \supset (F \vee G)$ বৈধ	$(p \cdot q) \supset (p \vee q)$ বৈধ বা $(pq) \supset (p \vee q)$ বৈধ

দেখা যাবে, বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানে বৈধতা, প্রতিপত্তি ইত্যাদি যেভাবে নির্ণয় করা হয়, বুলীয় পদের বৈধতা অবৈধতাও সেভাবে নির্ণয় করা যায়।

$p \cdot q$ কি $p \vee q$-কে প্রতিপাদন করে ? বা
$(p \cdot q) \supset (p \vee q)$—এ বাক্য কি বৈধ ?

আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণের সাহায্যে এর উত্তর পাই এভাবে :

$$(p \cdot q) \supset (p \vee q)$$
$$(1 \cdot q) \supset (1 \vee q) \qquad (0 \cdot q) \supset (0 \vee q)$$
$$q \supset 1 \qquad\qquad 0 \supset q$$
$$1 \qquad\qquad\qquad 1$$

সুতরাং উক্ত বাক্য বৈধ। ঠিক এভাবে নিম্নোক্ত প্রশ্নেরও উত্তর পেতে পারি।

FG কি $F \vee G$-কে প্রতিপাদন করে ? বা
$(FG) \supset (F \vee G)$—এ বাক্য কি বৈধ ?

ওপরের দ্বিশাখীকরণে p-এর জায়গায় F, q-এর জায়গায় G বসাও, মানে কল্পনা কর F একটা বাক্য, G একটা বাক্য ; তাহলে এ প্রশ্নের জবাব পাবে।

ওপরে যা বলা হল তার থেকে একটা শিক্ষা পেলাম। আমরা যে নির্ণয় পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে যাচ্ছি তাতে আমাদের-প্রস্তাবিত-সংকেতলিপিতে-লেখা F, G ইত্যাদিকে বাক্য বলে কল্পনা করলে ক্ষতি নেই, বরং তাতে নির্ণয়ের কাজ সহজ হয়।

২. পক্ষপাতন পদ্ধতি (Fell Swoop)

এটা ধরে নেওয়া হয়েছে যে, বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানে ব্যবহৃত নির্ণয় পদ্ধতিগুলির সঙ্গে তোমাদের পরিচয় আছে। তবু নিচে একটা সংক্ষিপ্ত নির্ণয় পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হল। এ পদ্ধতির নাম Fell Swoop বা পক্ষপাতন পদ্ধতি। এটা প্রয়োগ করা হয় প্রাকল্পিক বাক্যের বৈধতা নির্ণয়ের জন্য।

কোনো কোনো বাক্য একটা বিশেষ সত্যমূল্য বিন্যাসে সত্য। যথা, $p \cdot q$ সত্য হবে যদি এমন হয় যে $p = 1, q = 1$; $p \cdot {\sim} q$ সত্য হবে যদি এমন হয় যে $p = 1, q = 0$ ধর, এ রকম কোনো বাক্য পূর্বকল্প। তাহলে

> যে যে সত্যমূল্য প্রয়োগ করলে পূর্বকল্পটি সত্য হবে, সে সে সত্যমূল্য অনুকল্পে বসাতে হবে। এ সত্যমূল্যে অনুকল্পটিও যদি সত্য হয় তাহলে : প্রাকল্পিকটি বৈধ, আর অনুকল্পটি যদি মিথ্যা হয় তাহলে প্রাকল্পিকটি অবৈধ।

এভাবে প্রাকল্পিকের বৈধতা নির্ণয় করাকে বলে Fell Swoop প্রয়োগ করা।

উদাহরণ

$${\sim} p \supset {\sim}(p \cdot q) \qquad (১)$$

এ বাক্যটি কি বৈধ ?

উত্তর : $\sim p$ সত্য হলে $p=0$। অনুকল্পে এ সত্যমূল্য বসিয়ে পাই

$$\sim p \supset \sim(p \cdot q)$$
$$\sim(0 \cdot q)$$
$$\sim 0$$
$$1$$

এ সত্যমূল্যে অনুকল্পও সত্য। সুতরাং (১) বৈধ।

$$(p \cdot q) \supset [(p \supset \sim q) \supset r] \qquad (২)$$

এ বাক্যটি কি বৈধ ?

উত্তর : $p \cdot q$ সত্য, $\therefore p=1, q=1$; অনুকল্পে এ সত্যমূল্য বসিয়ে পাই

$$(p \cdot q) \supset [(p \supset \sim q) \supset r]$$
$$(1 \supset 0) \supset r$$
$$0 \supset r$$
$$\sim 0$$
$$1$$

যে সত্যমূল্যে (২)-এর পূর্বকল্প সত্য, দেখা গেল, সে সত্যমূল্যে (২)-এর অনুকল্পও সত্য ; সুতরাং (২) বৈধ।

আবার কোনো কোনো বাক্য একটা বিশেষ সত্যমূল্য বিন্যাসে মিথ্যা। যথা, $p \supset q$ মিথ্যা হবে যদি এমন হয় যে $p=1, q=0$, $p \vee q$ মিথ্যা হবে এ সত্যমূল্য বিন্যাসে : $p=0, q=0$। ধর, এ রকম কোনো বাক্য অনুকল্প। তাহলে

> যে যে সত্যমূল্য গ্রহণ করলে অনুকল্পটি মিথ্যা হবে সে সে সত্যমূল্য পূর্বকল্পে বসাতে হবে। এ সত্যমূল্যে পূর্বকল্পটিও যদি মিথ্যা হয় তাহলে : প্রাকল্পিকটি বৈধ, আর পূর্বকল্পকটি যদি সত্য হয় তাহলে প্রাকল্পিকটি অবৈধ।

এভাবে প্রাকল্পিকের বৈধতা নির্ণয় করলে Fell Swoop পদ্ধতিই প্রয়োগ করা হয়।

উদাহরণ

$$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r) \qquad (৩)$$

এ বাক্যটি কি বৈধ ?

উত্তর : $p \supset r$ যদি মিথ্যা হয় তাহলে $p=1, r=0$। পূর্বকল্পে এ সত্যমূল্য বসিয়ে পাই

$$[(p \supset q) \cdot (q \supset r)] \supset (p \supset r)$$
$$(1 \supset q) \cdot (q \supset 0)$$
$$q \cdot \sim q$$
$$0$$

দেখা গেল, ঐ সত্যমূল্যে পূর্বকল্পও মিথ্যা। সুতরাং (৩) বৈধ।

$$[(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)] \supset p \qquad (৪)$$

এ বাক্যটি কি বৈধ ?

উত্তর : $p=0$, এ সত্যমূল্য পূর্বকল্পে বসিয়ে পাই

$$[(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)] \supset p$$
$$(0 \cdot q) \vee (0 \cdot \sim q)$$
$$0 \vee 0$$
$$0$$

এই সত্যমূল্য বিন্যাসে পূর্বকল্পও মিথ্যা। সুতরাং (৪) বৈধ।

৩. বুলীয় বাক্য ও বৈধতা সূত্র

আমরা যে নির্ণয় পদ্ধতির কথা বলতে যাচ্ছি তা প্রয়োগ করতে হলে বিধের বাক্যকে বুলীয় বাক্যের আকারে ব্যক্ত করতে হয়। যেসব বাক্যের বৈধতা পরীক্ষা করতে চাই সেগুলিকে বা সেগুলির অঙ্গবাক্যকে এভাবে ব্যক্ত করে পাব নানান রকমের বাক্য। এ বাক্যগুলিকে নিম্নোক্ত পাঁচটি শ্রেণীতে ভাগ করতে পারি।

(1) বুলীয় সত্ত্ব বাক্য, ∃ক* আকারের বাক্য, যথা :

$\exists FG$, $\exists(F \vee G)$, $\exists(F \vee \bar{F})$

(2) বুলীয় সত্ত্ববাক্যের নিষেধ, ~∃ক* আকারের বাক্য, যথা :

$\sim\exists F\bar{G}$, $\sim\exists FG$, $\sim\exists F\bar{F}$

(3) বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের নিষেধ দিয়ে গঠিত বৈকল্পিক বাক্য, যথা :

$\sim\exists F \vee \sim\exists G$, $\sim\exists FG \vee \sim\exists F\bar{G}$

(4) সত্ত্ব প্রাকল্পিক বাক্য, যথা :

$\exists F \supset \exists(F \vee G)$, $(\exists F \cdot \exists G) \supset \exists F$

(5) উপরোক্ত যেকোনো প্রকারের বাক্য দিয়ে গঠিত সংযৌগিক বাক্য, যথা :

$\exists FG \cdot \sim\exists FG$, $[\exists FG \supset \exists(F \vee G)] \cdot \sim(\exists F \cdot \exists G)$

মনে হতে পারে, এ বাক্যবিভাগ অসম্পূর্ণ, কেননা আলোচ্য নির্ণয় পদ্ধতি প্রয়োগ করতে গিয়ে আরও নানান রকমের বাক্য পেতে পারি। কিন্তু দেখা যাবে, অন্য আকারের বাক্য উক্ত পাঁচটি শ্রেণীর কোনো না কোনোটির অন্তর্ভুক্ত। যেমন, আমরা বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের নিষেধ দিয়ে গঠিত বৈকল্পিকের কথা বলেছি [(3) দেখ], কিন্তু বুলীয় সত্ত্ব বাক্য দিয়ে গঠিত বৈকল্পিকের কথা বলি নি। বলি নি, কেননা দেখা যাবে, LED প্রয়োগ করে এসব বাক্যকে বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের আকারে ব্যক্ত করা যায়। যথা

$$\exists F \vee \exists G \vee \exists H$$

---

* ক বোঝাচ্ছে বুলীয় পদ, যথা—F, FG, $FG\bar{H}$ ইত্যাদি।

এ বাক্যকে ব্যক্ত করা যায় এভাবে

$$\exists(F \vee G \vee H)$$

বলা বাহুল্য, শেষোক্ত বাক্যটি ∃ক আকারের বাক্য [(1) দ্রষ্টব্য] ।

উপরোক্ত প্রত্যেক প্রকারের বাক্য সম্বন্ধে নিচে একটা করে বৈধতা-নিয়ম উল্লেখ করা হল। নিয়মগুলি কোয়াইন্ থেকে নেওয়া—এ কথাটা মনে রাখার জন্য ক্রমিক সংখ্যার আগে 'Q' ব্যবহার করা হল ।

Q1. বুলীয় সত্ত্ব বাক্য বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে এর অন্তর্গত বুলীয় পদ বৈধ ।

উদাহরণ

$\exists(F \vee \bar{F})$ বৈধ, কেননা $F \vee \bar{F}$ বৈধ ।

Q2. বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের নিষেধ বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে এর অন্তর্গত বুলীয় পদ স্ববিরোধী ।

এ নিয়ম খাটে, কেননা : আমরা জানি,— $\sim(p \cdot \sim p)$ সম $\sim p \vee p$ বা $p \vee \sim p$, মানে স্ববিরোধী বাক্যের নিষেধ হল বৈধ বা স্বতসত্য বাক্য ।

উদাহরণ

$\sim\exists F\bar{F}$ বৈধ, কেননা $F\bar{F}$ স্ববিরোধী ।

Q3. বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের নিষেধ দিয়ে গঠিত বৈকল্পিক বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে এ নিষেধগুলির কোনো একটি স্ববিরোধী ।

কেন এ নিয়ম খাটে তা বুঝে নাও ।

$$\sim\exists\text{ক} \vee \sim\exists\text{খ} \vee \sim\exists\text{গ}$$

এ বাক্য থেকে DM-এর সাহায্যে পাই

$$\sim(\exists\text{ক} \cdot \exists\text{খ} \cdot \exists\text{গ})$$

এখন এ বাক্যের ∃ক, ∃খ, ∃গ—এদের কোনোটি স্ববিরোধী হলে (মানে ক, খ, গ এদের কোনোটি স্ববিরোধী হলে) $\exists\text{ক} \cdot \exists\text{খ} \cdot \exists\text{গ}$ স্ববিরোধী। এবং তাহলে এর নিষেধ $\sim(\exists\text{ক} \cdot \exists\text{খ} \cdot \exists\text{গ})$ বা $\sim\exists\text{ক} \vee \sim\exists\text{খ} \vee \sim\exists\text{গ}$ বৈধ হবে ।

Q4. সত্ত্ব প্রাকল্পিক বাক্য বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি : পূর্বকল্প সত্ত্ব বাক্যটির, বা পূর্বকল্পের অন্তর্ভুক্ত কোনো একটি সত্ত্ব বাক্যের, বুলীয় পদ অনুকল্প সত্ত্ব বাক্যের বুলীয় পদকে প্রতিপাদন করে ।

উদাহরণ

$$\exists F \supset \exists(F \vee G)$$

এ সত্ত্ব প্রাকল্পিকটি বৈধ, কেননা পূর্বকল্পের অন্তর্গত পদ F অনুকল্পের $F \vee G$-কে প্রতিপাদন করে ।

Q5. উক্ত যেকোনো প্রকারের বাক্য দিয়ে গঠিত সংযৌগিক বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে : প্রত্যেকটি সংযোগী বৈধ।

কেননা : আমরা জানি, ব · ভ · ম আকারের বাক্য স্বতসত্য বা বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি প্রত্যেকটি সংযোগী বৈধ (মানে, স্বতসত্য) হয়।

৪. সত্ত্ব প্রাকল্পিক ও বৈধতা নির্ণয় পদ্ধতি

আমরা বলেছি, অমুক প্রকারের বাক্য বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি অমুক পদ বৈধ হয় বা অমুক পদ তমুক পদকে প্রতিপাদন করে। প্রশ্ন করতে পার : কোনো পদ বৈধ কিনা, কোনো পদ অন্য কোনো পদকে প্রতিপাদন করে কিনা, কি করে বুঝব ? কিন্তু এ প্রশ্নের জবাব ত আগেই দিয়েছি (১৬৯ দ্রষ্টব্য)। ওখানে বলা হয়েছে F, G, H ইত্যাদিকে বাক্য বলে কল্পনা করে বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের নির্ণয় পদ্ধতি—যেমন আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতি—দিয়েই এ প্রশ্নের জবাব পাওয়া যায়, পদের বৈধতা ও প্রতিপত্তি নির্ণয় করা যায়।

নিচে আমরা প্রধানত Q4-এর প্রয়োগ দেখাব। কেননা কোনো যুক্তির বৈধতা বিচার করতে গিয়ে পাই একটা প্রাকল্পিক বাক্য—যে প্রাকল্পিকের পূর্বকল্প হল যুক্তিটির হেতুবাক্য বা হেতুবাক্য সংযোগ, আর অনুকল্প হল যুক্তিটির সিদ্ধান্ত। উদাহরণ

$$Ux(Mx \supset Px),\ Ux(Sx \supset Mx)\ \ \therefore\ Ux(Sx \supset Px)$$

এ যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা করতে হলে আমাদের দেখতে হবে নিম্নোক্ত প্রাকল্পিকটি বৈধ না অবৈধ।

$$[\,Ux(Mx \supset Px) \cdot Ux(Sx \supset Mx)\,] \supset Ux(Sx \supset Px)$$

যদি এ প্রাকল্পিকটি বৈধ হয় তাহলে প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ, আর যদি প্রাকল্পিকটি বৈধ বা স্বতসত্য না হয় তাহলে যুক্তিটি অবৈধ।

যে নির্ণয় পদ্ধতি আমরা আলোচনা করছি তা প্রয়োগ করতে হলে এরূপ প্রাকল্পিককে সত্ত্ব প্রাকল্পিকে রূপান্তরিত করতে হয়। নিচে বেশ কয়টি উদাহরণ নিয়ে আমরা এ পদ্ধতির প্রয়োগ দেখাব।

প্রথম সংস্থানে AAA

$Ux(Gx \supset Hx)$	$G\bar{H}=0$	$\sim\exists G\bar{H}$
$Ux(Fx \supset Gx)$	$F\bar{G}=0$	$\sim\exists F\bar{G}$
$\therefore\ Ux(Fx \supset Hx)$	$\therefore\ F\bar{H}=0$	$\therefore\ \sim\exists F\bar{H}$

নিচে অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকটিকে সত্ত্ব প্রাকল্পিকে রূপান্তরিত করা হল।

$$(\sim\exists G\bar{H} \cdot \sim\exists F\bar{G}) \supset \sim\exists F\bar{H}$$

$$\sim(\sim\exists G\bar{H} \cdot \sim\exists F\bar{G}) \vee \sim\exists F\bar{H} \qquad [\text{Def} \supset]$$

$(\exists G\bar{H} \vee \exists F\bar{G}) \vee \sim\exists F\bar{H}$	[DM, DN]
$\sim\exists F\bar{H} \vee (\exists G\bar{H} \vee \exists F\bar{G})$	[Com.]
$\exists F\bar{H} \supset (\exists G\bar{H} \vee \exists F\bar{G})$	[Def ⊃]
$\exists F\bar{H} \supset \exists(G\bar{H} \vee F\bar{G})$	[LED]

এবার

$$F\bar{H} \supset (G\bar{H} \vee F\bar{G})$$

-এর বৈধতা পরীক্ষা করতে হবে। নিচে fell swoop দিয়ে এর বৈধতা পরীক্ষা করা হল।

$F\bar{H}$ সত্য হবে নিম্নোক্ত সত্যমূল্য বিন্যাসে

$$F=1, \quad H=0$$

এ সত্যমূল্য বসিয়ে পাই

$$F\bar{H} \supset (G\bar{H} \vee F\bar{G})$$
$$G1 \vee 1\bar{G}$$
$$G \vee \bar{G}$$
$$1$$

দেখা গেল, $F\bar{H} \supset (G\bar{H} \vee F\bar{G})$ বৈধ, মানে $F\bar{H}$ প্রতিপাদন করে $G\bar{H} \vee F\bar{G}$ কে। সুতরাং $\exists F\bar{H} \supset \exists(G\bar{H} \vee \bar{F}G)$ বৈধ। সুতরাং প্রদত্ত যুক্তি (-আকার) বৈধ।

প্রথম সংস্থানে AII

		অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক
$G\bar{H}=0$	$\sim\exists G\bar{H}$	$(\sim\exists G\bar{H} \cdot \exists FG) \supset \exists FH$
$FG \neq 0$	$\exists FG$	
$\therefore\ FH \neq 0$	$\therefore\ \exists FH$	

সত্র প্রাকল্পিকে রূপান্তর

$(\sim\exists G\bar{H} \cdot \exists FG) \supset \exists FH$	
$(\exists G\bar{H} \vee \sim\exists FG) \vee \exists FH$	[Def ⊃, DN]
$\sim\exists FG \vee (\exists G\bar{H} \vee \exists FH)$	[Com. Assoc.]
$\exists FG \supset (\exists G\bar{H} \vee \exists FH)$	[Def ⊃]
$\exists FG \supset \exists(G\bar{H} \vee FH)$	[LED]

Fell Swoop :

$F=1, \quad G=1$

$$FG \supset (G\bar{H} \vee FH)$$
$$1\bar{H} \vee 1H$$
$$\bar{H} \vee H$$
$$1$$

$FG \supset (G\bar{H} \vee FH)$ বৈধ, সুতরাং অনুষঙ্গী সত্ত্ব প্রাকল্পিকটি বৈধ। সুতরাং যুক্তি (আকার)টি বৈধ।

প্রথম সংস্থানে AOO

$$G\bar{H}=0 \qquad \sim\exists G\bar{H}$$
$$F\bar{G}\neq 0 \qquad \exists F\bar{G}$$
$$\therefore\ F\bar{H}\neq 0 \qquad \therefore\ \exists F\bar{H}$$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক

$$(\sim\exists G\bar{H} \cdot \exists F\bar{G}) \supset \exists F\bar{H}$$

সত্ত্ব প্রাকল্পিকে রূপান্তর

$$(\sim\exists G\bar{H} \cdot \exists F\bar{G}) \supset \exists F\bar{H}$$
$$\exists G\bar{H} \vee \sim\exists F\bar{G} \vee \exists F\bar{H} \qquad [\text{Def} \supset, \text{DeM, DN, Assoc.}]$$
$$\sim\exists F\bar{G} \vee (\exists G\bar{H} \vee \exists F\bar{H}) \qquad [\text{Com. Assoc.}]$$
$$\exists F\bar{G} \supset (\exists G\bar{H} \vee \exists F\bar{H}) \qquad [\text{Def} \supset]$$
$$\exists F\bar{G} \supset \exists(G\bar{H} \vee F\bar{H}) \qquad [\text{LED}] \qquad [1]$$

এবার

$$F\bar{G} \supset (G\bar{H} \vee F\bar{H}) \qquad [2]$$

-এর বৈধতা বিচার।

Fell Swoop :

$$F=1,\ G=0 \qquad F\bar{G} \supset (G\bar{H} \vee F\bar{H})$$
$$0\bar{H} \vee 0\bar{H}$$
$$0 \vee 0$$
$$0$$

2 অবৈধ, সুতরাং 1 অবৈধ ; সুতরাং প্রথম সংস্থানে AOO অবৈধ।

দ্বিতীয় সংস্থানে AOO

$$\sim\exists H\bar{G}$$
$$\exists F\bar{G}$$
$$\therefore\ \exists F\bar{H}$$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক

$$(\sim\exists H\bar{G} \cdot \exists F\bar{G}) \supset \exists F\bar{H}$$

রূপান্তর

$$(\sim\exists H\bar{G} \cdot \exists F\bar{G}) \supset \exists F\bar{H}$$
$$\exists H\bar{G} \vee \sim\exists F\bar{G} \vee \exists F\bar{H} \qquad [\text{Def} \supset, \text{DM, DN, Assoc.}]$$
$$\sim\exists F\bar{G} \vee (\exists H\bar{G} \vee \exists F\bar{H}) \qquad [\text{Com., Assoc.}]$$
$$\exists F\bar{G} \supset (\exists H\bar{G} \vee \exists F\bar{H})$$
$$\exists F\bar{G} \supset \exists(H\bar{G} \vee F\bar{H})$$

Fell Swoop

$F=1, \quad G=0$

$$F\bar{G} \supset (H\bar{G} \vee F\bar{H})$$
$$H1 \vee 1\bar{H}$$
$$H \vee \bar{H}$$
$$1$$

তৃতীয় সংস্থানে OAO

$\exists G\bar{H}$

$\sim\exists G\bar{F}$

$\therefore\ \exists F\bar{H}$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকের রূপান্তর

$$(\exists G\bar{H} \cdot \sim\exists G\bar{F}) \supset \exists F\bar{H}$$
$$(\sim\exists G\bar{H} \vee \exists G\bar{F} \quad \vee \quad \exists F\bar{H})$$
$$\exists G\bar{H} \supset (\exists G\bar{F} \quad \vee \quad \exists F\bar{H})$$
$$\exists G\bar{H} \supset \exists(G\bar{F} \vee F\bar{H})$$

$G=1, \quad H=0$

$$G\bar{H} \supset (G\bar{F} \vee F\bar{H})$$
$$1\bar{F} \vee F1$$
$$\bar{F} \vee F$$
$$1$$

সুতরাং তৃতীয় সংস্থানে OAO বৈধ।

Darapti

$\sim\exists G\bar{H}$

$\sim\exists G\bar{F}$

$\therefore\ \exists FH$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকের রূপান্তর

$$(\sim\exists G\bar{H} \cdot \sim\exists G\bar{F}) \supset \exists FH$$
$$\exists G\bar{H} \vee \exists G\bar{F} \vee \exists FH$$
$$\exists(G\bar{H} \vee G\bar{F} \vee FH) \quad \text{[LED]}$$

$G\bar{H} \vee G\bar{F} \vee FH$-এর আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ

$$G\bar{H} \vee G\bar{F} \vee FH$$

$1\bar{H} \vee 1\bar{F} \vee FH$		$0\bar{H} \vee 0\bar{F} \vee FH$	
$\bar{H} \vee \bar{F} \vee FH$		$0 \vee 0 \vee FH$	
$\bar{H} \vee 0 \vee 1H$	$\bar{H} \vee 1 \vee 0H$	FH	
$\bar{H} \vee 0 \vee H$	1	$1H$	$0H$
$\bar{H} \vee H$		H	0
1		1	0

বুলীয় পদটি অবৈধ, সুতরাং বুলীয় সত্ত্ব বাক্যটি অবৈধ ; সুতরাং Darapti অবৈধ ।

Felapton

$$\sim\exists GH \qquad (\sim\exists GH \cdot \sim\exists G\bar{F}) \supset \exists F\bar{H}$$
$$\sim\exists G\bar{F} \qquad \exists GH \vee \exists G\bar{F} \vee \exists F\bar{H}$$
$$\therefore\ \exists F\bar{H} \qquad \exists(GH \vee G\bar{F} \vee F\bar{H})$$
$$1H \vee 1\bar{F} \vee F\bar{H} \qquad\qquad 0H \vee 0\bar{F} \vee F\bar{H}$$
$$H \vee \bar{F} \vee F\bar{H} \qquad\qquad 0 \vee 0 \vee F\bar{H}$$
$$H \vee 0 \vee 1\bar{H} \qquad H \vee 1 \vee 0\bar{H} \qquad\qquad F\bar{H}$$
$$H \vee 0 \vee \bar{H} \qquad 1 \qquad\qquad 1\bar{H} \qquad 0\bar{H}$$
$$H \vee \bar{H} \qquad\qquad\qquad \bar{H} \qquad 0$$
$$1 \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \qquad 1$$

বুলীয় পদটি অবৈধ, সুতরাং সত্ত্ব বাক্যটি অবৈধ ; ∴ Felapton অবৈধ ।

Bramantip

$$\sim\exists H\bar{G} \qquad (\sim\exists H\bar{G} \cdot \sim\exists G\bar{F}) \supset \exists FH$$
$$\sim\exists G\bar{F} \qquad \exists H\bar{G} \vee \exists G\bar{F} \vee \exists FH$$
$$\therefore\ \exists FH \qquad \exists(H\bar{G} \vee G\bar{F} \vee FH)$$

সত্যমূল্য বিশ্লেষণ (আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ) করে দেখা যাবে বুলীয় পদটি অবৈধ, সুতরাং Bramantip অবৈধ ।

Fesapo

$$\sim\exists HG \qquad (\sim\exists HG \cdot \sim\exists G\bar{F}) \supset \exists F\bar{H}$$
$$\sim\exists G\bar{F} \qquad \exists HG \vee \exists G\bar{F} \vee \exists F\bar{H}$$
$$\therefore\ \exists F\bar{H} \qquad \exists(HG \vee G\bar{F} \vee F\bar{H})$$
$$HG \vee G\bar{F} \vee F\bar{H}$$
$$H1 \vee 1\bar{F} \vee F\bar{H} \qquad\qquad\qquad H0 \vee 0\bar{F} \vee F\bar{H}$$
$$H \vee \bar{F} \vee F\bar{H} \qquad\qquad\qquad 0 \vee 0 \vee F\bar{H}$$
$$1 \vee \bar{F} \vee F0 \qquad 0 \vee \bar{F} \vee F1 \qquad\qquad F\bar{H}$$
$$1 \qquad 0 \vee \bar{F} \vee F \qquad\qquad 1\bar{H} \qquad 0\bar{H}$$
$$\bar{F} \vee F \qquad\qquad \bar{H} \qquad 0$$
$$1 \qquad\qquad 0 \quad 1$$

বুলীয় পদ $HG \vee G\bar{F} \vee F\bar{H}$ অবৈধ, সুতরাং বুলীয় সত্ত্ব বাক্যটি অবৈধ ; সুতরাং Fesapo অবৈধ ।

৫. সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগের আরও উদাহরণ

এবার এমন একটা যুক্তি নেওয়া হল যা ন্যায় যুক্তি নয়।

All of the witnesses who hold stock in the firm are employees,
All of the witnesses are employees or hold stock in the firm ;
∴ All of the witnesses are employees. —Quine

মানকলিপিতে এ যুক্তির সাংকেতিক রূপ হবে :

$$\begin{aligned} & \mathrm{U}x[(Wx \cdot Hx) \supset Ex] \\ & \mathrm{U}x[Wx \supset (Ex \vee Hx)] \\ \therefore\ & \mathrm{U}x(Wx \supset Ex) \end{aligned}$$

একে বুলীয় সমীকরণে ব্যক্ত করে পাই

$$\begin{aligned} & WH\bar{E}=0 && WH\bar{E}=0 \\ & W(\overline{E \vee H})=0 && W\bar{E}\bar{H}=0 \\ \therefore\ & W\bar{E}=0 & \therefore\ & W\bar{E}=0 \end{aligned}$$

আমাদের প্রস্তাবিত মানকলিপিতে যুক্তিটি এ রূপ নেবে—

$$\begin{aligned} & \sim\exists WH\bar{E} \\ & \sim\exists W\bar{E}\bar{H} \\ \therefore\ & \sim\exists W\bar{E} \end{aligned}$$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকটি এভাবে রূপান্তরিত করা যায় :

$$(\sim\exists WH\bar{E} \cdot \sim\exists W\bar{E}\bar{H}) \supset \sim\exists W\bar{E}$$
$$\exists WH\bar{E} \vee \exists W\bar{E}\bar{H} \vee \sim\exists W\bar{E}$$
$$\sim\exists W\bar{E} \vee (\exists WH\bar{E} \vee \exists W\bar{E}\bar{H})$$
$$\exists W\bar{E} \supset (\exists WH\bar{E} \vee \exists W\bar{E}\bar{H})$$
$$\exists W\bar{E} \supset \exists(WH\bar{E} \vee W\bar{E}\bar{H})$$

এখন, প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ হবে যদি

$$W\bar{E} \supset (WH\bar{E} \vee W\bar{E}\bar{H})$$

বৈধ হয়।

Fell Swoop

$W=1,\ E=0$

$$\begin{aligned} & W\bar{E} \supset (WH\bar{E} \vee W\bar{E}\bar{H}) \\ & 1H1 \vee 11\bar{H} \\ & H \vee \bar{H} \\ & 1 \end{aligned}$$

সিদ্ধান্ত : প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ।

আর একটা উদাহরণ।

Some *F* are *G* or some *F* are *H*,

∴ Some *F* are *G* or *H*.

যুক্তিটি এভাবে সংকেতায়িত করা দরকার :

$$\exists FG \vee \exists FH$$

$$\therefore \exists F(G \vee H)$$

নিচে অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকটি রূপান্তরিত করা হল।

1. $(\exists FG \vee \exists FH) \supset \exists F(G \vee H)$
2. $(\sim\exists FG \cdot \sim\exists FH) \vee \exists F(G \vee H)$ [Df ⊃, DM]
3. $[\sim\exists FG \vee \exists F(G \vee H)] \cdot [\sim\exists FH \vee \exists F(G \vee H)]$ [Dist.]
4. $\exists FG \supset \exists F(G \vee H)] \cdot [\exists FH \supset \exists F(G \vee H)]$ [Df ⊃]

4 গঠিত দুটি সত্ত্ব প্রাকল্পিক বাক্য দিয়ে। এ বাক্য বৈধ হবে (Q 5. দেখ) যদি এমন হয় যে দুটি সংযোগীই বৈধ।

প্রথম সংযোগী বৈধ হবে যদি

$FG \supset F(G \vee H)$ I

বৈধ হয়, আর দ্বিতীয় সংযোগীটি বৈধ হবে যদি

$FH \supset F(G \vee H)$ II

বৈধ হয়।

I Fell Swoop

$F=1,\ G=1$

$$\begin{array}{l} FG \supset F(G \vee H) \\ \quad\ 1\ (1 \vee H) \\ \quad\ 1 \quad 1 \\ \quad\ 1 \end{array}$$

II Fell Swoop

$F=1,\ H=1$

$$\begin{array}{l} FH \supset F\,(G \vee H) \\ \quad\ 1\ (G \vee 1) \\ \quad\ 1 \quad 1 \\ \quad\ 1 \end{array}$$

I-ও বৈধ, II-ও বৈধ, সুতরাং 4 বৈধ ; সুতরাং মূল যুক্তিটি বৈধ।

সবশেষে যে উদাহরণটি নিলাম সেটা একটু জটিল। অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকটির রূপান্তর ভাল করে লক্ষ করবে।

All *F* who are *G* are *H* ⊃ some *F* are not *G*,

All *F* are *G* v all *F* are *H* ;

∴ All *F* who are *H* are *G* ⊃ some *F* who are not *H* are *G*.

—Quine

মানকলিপিতে এ যুক্তি ব্যক্ত হবে এভাবে :

$$\text{U}x[(Fx \cdot Gx) \supset Hx] \supset \exists x(Fx \cdot \sim Gx)$$
$$\text{U}x(Fx \supset Gx) \vee \text{U}x(Fx \supset Hx)$$
$$\therefore\ \text{U}x[(Fx \cdot Hx) \supset Gx] \supset \exists x(Fx \cdot \sim Hx \cdot Gx)$$

প্রত্যেক ছত্রের অঙ্গবাক্যগুলিকে আমরা বুলীয় সত্ত্ব বাক্যে ব্যক্ত করতে চাই। এ কাজ সহজ হবে যদি অঙ্গবাক্যগুলিকে এভাবে বুলীয় সমীকরণ অসমীকরণের আকারে ব্যক্ত করি—

$$[FG\bar{H}=0] \supset [F\bar{G}\neq 0]$$
$$[F\bar{G}=0] \vee [F\bar{H}=0]$$
$$\therefore\ [FH\bar{G}=0] \supset [F\bar{H}G\neq 0]$$

এখন যুক্তিটি এভাবে লিখতে পারি :

$$\sim\exists FG\bar{H} \supset \exists F\bar{G}$$
$$\sim\exists F\bar{G} \vee \sim\exists F\bar{H}$$
$$\therefore\ \sim\exists FH\bar{G} \supset \exists F\bar{H}G$$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক

$$[\sim\exists FG\bar{H} \supset \text{E}F\bar{G}) \cdot (\sim\exists F\bar{G} \vee \sim\exists F\bar{H})] \supset (\sim\exists FH\bar{G} \supset \exists F\bar{H}G)$$

লক্ষণীয়, বুলীয় পদের অন্তর্গত অক্ষরগুলি (সংযোগীগুলি) সর্বত্র একই ক্রমে নেই (অনুকল্পের বুলীয় পদ দেখ)। এদের একই বর্ণানুক্রমে লিখে পাই :

1. $[(\sim\exists FG\bar{H} \supset \exists F\bar{G}) \cdot (\sim\exists F\bar{G} \vee \sim\exists F\bar{H})] \supset (\sim\exists F\bar{G}H \supset \exists FG\bar{H})$.

এ বাক্যের রূপান্তর :

2. $\sim(\sim\exists FG\bar{H} \supset \exists F\bar{G}) \vee \sim(\sim\exists F\bar{G} \vee \sim\exists F\bar{H}) \vee (\sim\exists FG\bar{H}) \supset \exists FG\bar{H}$

3. $(\sim\exists FG\bar{H} \cdot \sim\exists F\bar{G}) \vee (\exists F\bar{G} \cdot \exists F\bar{H}) \vee \exists F\bar{G}H \vee \exists FG\bar{H}$

I II III IV

সংক্ষেপকরণের ও নির্দেশের সুবিধার জন্য বিকল্পগুলিকে I, II ইত্যাদি দিয়ে চিহ্নিত করা হল।

মনে কর, I আর II-এতে Assoc. প্রয়োগ করে এদের বন্ধনীভুক্ত করা হয়েছে। এখন I আর II-এতে বারবার সঞ্চালনের (Distribution-এর) সূত্র প্রয়োগ করে পাই এ সংযোগীগুলি :

$$\sim\exists FG\bar{H} \vee \exists F\bar{G} \quad \text{(i)}$$
$$\sim\exists FG\bar{H} \vee \exists F\bar{H} \quad \text{(ii)}$$
$$\sim\exists F\bar{G} \vee \exists F\bar{G} \quad \text{(iii)}$$
$$\sim\exists F\bar{G} \vee \exists F\bar{H} \quad \text{(iv)}$$

স্বতসত্য সংযোগী বর্জন করা যায়, মানে $p \cdot (q \vee \sim q)$-এর বদলে লেখা যায় এর সমার্থক p। কাজেই (iii) বাদ দিতে পারি। তাহলে 3 নেবে এ রূপ :

4. $[(\sim \exists FG\bar{H} \vee \exists F\bar{G}) \cdot (\sim \exists FG\bar{H} \vee \exists F\bar{H}) \cdot (\sim \exists F\bar{G} \vee \exists F\bar{H})]$
$\vee$ III $\vee$ IV

এতে Com. প্রয়োগ করে পাই—

5. III $\vee$ IV $\vee$ $[(\sim \exists FG\bar{H} \vee \exists F\bar{G}) \cdot (\cdots\cdots\cdots) \cdot (\cdots\cdots\cdots)]$

এতে Dist. প্রয়োগ করে পাই এ সংযোগীগুলি :

$$\exists F\bar{G}H \vee \underline{\exists FG\bar{H} \vee \sim \exists FG\bar{H}} \vee \exists F\bar{G} \quad (ক)$$

$$\exists F\bar{G}H \vee \underline{\exists FG\bar{H} \vee \sim \exists FG\bar{H}} \vee \exists F\bar{H} \quad (খ)$$

$$\exists F\bar{G}H \vee \exists FG\bar{H} \vee \sim \exists F\bar{G} \vee \exists F\bar{H} \quad (গ)$$

লক্ষণীয় (ক) আর (খ) $p \vee q \vee \sim q \vee r$ আকারের বাক্য, সুতরাং স্বতসত্য। স্বতসত্য সংযোগী বর্জনের সূত্র প্রয়োগ করে (ক) আর (খ) বাদ দেওয়া যায়। তাহলে 5-এর সমার্থক হিসাবে লিখতে পারি—

6. $\exists F\bar{G}H \vee \exists FG\bar{H} \vee \sim \exists F\bar{G} \vee \exists F\bar{H}$

আর এ বাক্যকে এভাবে রূপান্তরিত করে সত্ত্ব প্রাকল্পিকে পৌঁছাতে পারি :

7. $\sim \exists F\bar{G} \vee \exists F\bar{H} \vee \exists F\bar{G}H \vee \exists FG\bar{H}$

8. $\exists F\bar{G} \supset (\exists F\bar{H} \vee \exists F\bar{G}H \vee \exists FG\bar{H})$

9. $\exists F\bar{G} \supset \exists (F\bar{H} \vee F\bar{G}H \vee FG\bar{H})$

এখন দেখা যাক

$$F\bar{G} \supset (F\bar{H} \vee F\bar{G}H \vee FG\bar{H})$$

বৈধ কিনা।

Fell Swoop

$F = 1, G = 0$ $\qquad$ $F\bar{G} \supset (F\bar{H} \vee F\bar{G}H \vee FG\bar{H})$

$$1\bar{H} \vee 11H \vee 10\bar{H}$$

$$\bar{H} \vee H \vee 0$$

$$\bar{H} \vee H$$

$$1$$

এর থেকে বোঝা গেল যে, প্রদত্ত যুক্তিটি বৈধ।

অনুশীলনী

সত্তু প্রাকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা নির্ণয় কর ঃ

(1) $\text{U}x(Ax \supset \sim Bx)$
$\exists x(Cx \cdot Ax)$
$\therefore \exists x(Cx \cdot \sim Bx)$

(2) $\text{U}x(Dx \supset \sim Ex)$
$\text{U}x(Fx \supset Ex)$
$\therefore \text{U}x(Fx \supset \sim Dx)$

(3) $\text{U}x(Gx \supset Hx)$
$\text{U}x(Ix \supset \sim Hx)$
$\therefore \text{U}x(Ix \supset \sim Gx)$

(4) $\exists x(Jx \cdot Kx)$
$\text{U}x(Jx \supset Lx)$
$\therefore \exists x(Lx \cdot Kx)$

(5) $\text{U}x(Mx \supset Nx)$
$\exists x(Mx \cdot Ox)$
$\therefore \exists x(Ox \cdot Nx)$

(6) $\text{U}x(Rx \supset Sx)$
$\text{U}x(Sx \supset Tx)$
$\therefore \exists x(Tx \cdot Rx)$

(7) $\text{U}x[Rx \supset (Sx \cdot Tx)], \exists x(\text{U}x \cdot Vx) \quad \therefore \exists x(Ux \cdot \sim Tx)$

(8) $\text{U}x[Tx \supset (Ux \supset Vx)]$
$\text{U}x[Ux \supset (Tx \supset \sim Vx)], \exists x(Tx \cdot Vx)$
$\therefore \exists x(Tx \cdot Ux)$

(9) $\text{U}x[Ax \supset (Bx \cdot Cx)]$
$\exists x(Dx \cdot Bx)$
$\exists x(Dx \cdot \sim Cx)$
$\therefore \text{U}x(Ax \supset \sim Dx)$

(10) $\text{U}x(Ex \supset Fx)$
$\exists x(Gx \cdot \sim Fx)$
$\therefore \text{U}x(Ex \supset Gx)$

(11) $\text{U}x[(Ax \cdot Cx) \supset Bx]$
$\text{U}x[Ax \supset (Bx \vee Cx)]$
$\therefore \text{U}x(Ax \supset Bx)$

(12) $\text{U}x[(Ax \cdot Bx) \supset Cx] \supset \exists x(Ax \cdot \sim Bx)$
$\text{U}x(Ax \supset Bx) \vee \text{U}x(Ax \supset Cx)$
$\therefore \text{U}x[(Ax \cdot Cx) \supset Bx] \supset \exists x(Ax \cdot \sim Cx \cdot Bx)$

১৩

প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি
(Cellular Method)

১. প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য, মূল বিধেয় বাক্য

প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি কী তা বুঝতে হলে প্রথমে "প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য" কথাটির মানে বুঝে নেওয়া দরকার। "প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য"-এর বদলে, এর সমনাম হিসাবে আমরা "মূল বিধেয় বাক্য" কথাটিও ব্যবহার করব।

কোন্ প্রসঙ্গে কি রকম বাক্যকে প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য* বা মূল বিধেয় বাক্য** বলে নিচের উদাহরণগুলি দেখলে তা সহজেই বোঝা যাবে।

ধর, কোনো বিধেয় বাক্যে আছে কেবল একটি বিধেয় অক্ষর : F। তাহলে সেক্ষেত্রে পাব

$$\exists F,\ \exists \bar{F}$$

—এ ২টি প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য।

ধর, কোনো বাক্যে আছে দুটি বিধেয় অক্ষর : F, G। সেক্ষেত্রে পাব

$$\exists FG,\ \exists F\bar{G},\ \exists \bar{F}G,\ \exists \bar{F}\bar{G}$$

—এ ৪টি প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য।

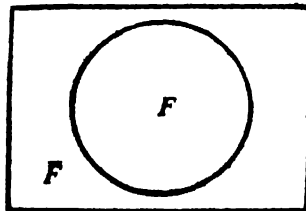
ধর, কোনো বাক্যে আছে তিনটি বিধেয় অক্ষর : F, G, H। এক্ষেত্রে পাব

$$\exists FGH,\ \exists FG\bar{H},\ \exists F\bar{G}H,\ \exists F\bar{G}\bar{H}$$

$$\exists \bar{F}GH,\ \exists \bar{F}G\bar{H},\ \exists \bar{F}\bar{G}H,\ \exists \bar{F}\bar{G}\bar{H}$$

—এ ৮টি প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য।

এ জাতীয় বাক্য কি করে পাই, এবং এদের প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য বলে কেন? এ প্রশ্নের উত্তর :

কোনো বাক্য ভেন্ রেখাচিত্রে চিত্রিত করতে গেলে যে প্রকোষ্ঠগুলি পাওয়া যায় তার প্রত্যেকটিতে সত্ত্বাবোধক × বসাও, মানে—কল্পনা কর প্রত্যেকটি প্রকোষ্ঠ অশূন্য। এখন, ×-চিহ্নিত প্রকোষ্ঠকে আমরা বর্ণনা করি... $\neq 0$ আকারের বাক্য দিয়ে। যেমন, যে ভেন্ চিত্রে একটি শ্রেণী F চিত্রিত তাতে আছে দুটি প্রকোষ্ঠ।

* Cellular existence expression ** Basic predicate expression

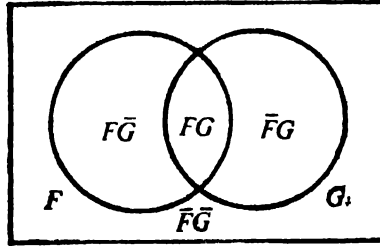
এখন যদি কল্পনা করি প্রকোষ্ঠ দুটি অশূন্য এবং যদি প্রকোষ্ঠগুলিকে $\neq 0$-এর ভাষায় বর্ণনা করি তাহলে পাই

$$F \neq 0, \; \bar{F} \neq 0$$

এ বাক্য দুটিকে সত্ত্ব বাক্যের আকারে ব্যক্ত করলে পাব এ প্রকোষ্ঠ সাত্ত্বিক বাক্য

$$\exists F, \; \exists \bar{F}$$

আবার

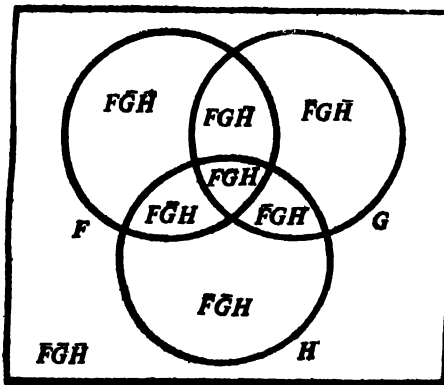
যে ভেন চিত্রে দুটি শ্রেণী (F, G) চিত্রিত তাতে আছে চারটি প্রকোষ্ঠ।

এখন যদি কল্পনা করি প্রত্যেকটি প্রকোষ্ঠ অশূন্য এবং যদি প্রকোষ্ঠগুলিকে $\cdots \neq 0$-এর ভাষায় বর্ণনা করি তাহলে পাই

$$FG \neq 0, \; F\bar{G} \neq 0, \; \bar{F}G \neq 0, \; \bar{F}\bar{G} \neq 0$$

এ বাক্যগুলিকে বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের আকারে ব্যক্ত করলে পাব এ প্রকোষ্ঠ সাত্ত্বিক বাক্যগুলি

$$\exists FG, \; \exists F\bar{G}, \; \exists \bar{F}G, \; \exists \bar{F}\bar{G}$$

যে বিধেয় বাক্যে দুটি অক্ষর—F, G, সে বাক্য প্রসঙ্গে এ বাক্যগুলিই মোট সম্ভাব্য প্রকোষ্ঠ সাত্ত্বিক বাক্য।

ধর, কোনো বিধেয় বাক্যে আছে তিনটি বিধেয় অক্ষর : F, G, H। এ বাক্যকে রেখাচিত্রে চিত্রিত করতে গেলে দরকার এ ছক :

ধর, এর প্রত্যেকটি প্রকোষ্ঠ অশূন্য। প্রকোষ্ঠগুলিকে যদি $\cdots \neq 0$-এর ভাষায় বর্ণনা করি তাহলে পাই

$$FGH \neq 0,\ FG\bar{H} \neq 0,\ F\bar{G}H \neq 0,\ F\bar{G}\bar{H} \neq 0$$

$$\bar{F}GH \neq 0,\ \bar{F}G\bar{H} \neq 0,\ \bar{F}\bar{G}H \neq 0,\ \bar{F}\bar{G}\bar{H} \neq 0$$

আর যদি বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের আকারে, $\exists\cdots$ আকারে, ব্যক্ত করি তাহলে পাই এ প্রকোষ্ঠ সাত্ত্বিক বাক্যগুলি :

$$\exists FGH,\ \exists FG\bar{H},\ \exists F\bar{G}H,\ \exists F\bar{G}\bar{H}$$

$$\exists \bar{F}GH,\ \exists \bar{F}G\bar{H},\ \exists \bar{F}\bar{G}H,\ \exists \bar{F}\bar{G}\bar{H}$$

যে বিধেয় বাক্যে তিনটি বিধেয় অক্ষর—F, G, H—সে বাক্য প্রসঙ্গে মোট সম্ভাব্য প্রকোষ্ঠ বাক্য বা মূল বিধেয় বাক্য হল এ আটটি।

২. প্রকোষ্ঠ পদ্ধতির ভূমিকা

প্রকোষ্ঠ-বাক্য-বাদ-দিয়ে-গঠিত বৈকল্পিকে রূপান্তর

যেকোনো বুলীয় সত্ত্ব বাক্যকে এমন সমার্থক বৈকল্পিকে ব্যক্ত করা যায় যাতে প্রত্যেকটি বিকল্প এক একটি প্রকোষ্ঠ সাত্ত্বিক বাক্য। এটা করা যায় বুলীয় পদকে বিস্তার করে এবং LED প্রয়োগ করে। নিশ্চয়ই এটা তোমাদের জানা যে, বুলীয় পদের বিস্তার করা হয় এ সূত্র প্রয়োগ করে :

$$\text{ক} = \text{ক}(\text{খ} \vee \bar{\text{খ}})$$

বা $$\text{ক} = \text{কখ} \vee \text{ক}\bar{\text{খ}}$$

যেমন

F থেকে G-এর সাহায্য নিয়ে পাই
$F(G \vee \bar{G})$ বা $FG \vee F\bar{G}$
FG থেকে H-এর সাহায্য নিয়ে পাই
$FG(H \vee \bar{H})$ বা $FGH \vee FG\bar{H}$

এবার একটা বুলীয় সত্ত্ব বাক্য।

$\exists F$ থেকে Fকে G-এর সাহায্যে বিস্তার করে পাই

$\exists F$

$\exists F(G \vee \bar{G})$

$\exists(FG \vee F\bar{G})$

$\exists FG \vee \exists F\bar{G}$ [LED]*

* Law of Existential Distribution

এতে বুলীয় সত্ত্ব বাক্য $\exists F$কে এর সমার্থক বৈকল্পিকে ব্যক্ত করা হল—যে বৈকল্পিকের অঙ্গবাক্যগুলি প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য।

দেখানো হল

$$\exists F \text{ সম } \exists FG \vee \exists F\bar{G}$$

এখন নিচের রূপান্তরটি দেখ।

$$\sim\exists F \qquad (1)$$

$$\sim\exists F(G \vee \bar{G}) \qquad (2)$$

$$\sim\exists(FG \vee F\bar{G}) \qquad (3)$$

$$\sim(\exists FG \vee \exists F\bar{G}) \qquad (4)$$

সুতরাং

$$\sim\exists F \text{ সম } \sim(\exists FG \vee \exists F\bar{G})$$

লক্ষণীয়, (1) বুলীয় সত্ত্ব বাক্য নয়, বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের নিষেধ। এখানে নিষেধ চিহ্নটি "হাতে রেখে" এর পরবর্তী $\exists F$কে বৈকল্পিকে রূপান্তরিত করা হয়েছে। লক্ষ কর, '$\sim$' আছে বন্ধনীর বাইরে। তার মানে, এখানে সমগ্র (1)-কে রূপান্তরিত করা হয়েছে বৈকল্পিকের নিষেধে, $\exists F$কে ব্যক্ত করা হয়েছে এমন বৈকল্পিকে যার অঙ্গবাক্যগুলি প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য।

কেবল বুলীয় সত্ত্ব বাক্যকে নয়, যেকোনো মানকিত বাক্যকে উক্তরূপে রূপান্তরিত করা যায়। নিম্নোক্ত বিধানগুলি মেনে চললে সহজেই এ রূপান্তর পেয়ে যাবে।

(১) প্রদত্ত বাক্যে সার্বিক মানক থাকলে, QE* প্রয়োগ করে মানকটি বর্জন কর, বাক্যটিকে $\exists\cdots$ বা $\sim\exists\cdots$ আকারে লেখ।

(২) প্রদত্ত বাক্যে যে যে বিধেয় অক্ষর আছে প্রত্যেকটি বুলীয় সংযৌগিক পদে সে সে অক্ষর বা তাদের নিষেধের অনুপ্রবেশ ঘটাতে হবে। যে সংযৌগিক পদে যে অক্ষর নেই সে অক্ষরের সাহায্যে বুলীয় বিস্তার কর, তাহলে এরূপ অনুপ্রবেশ ঘটাতে পারবে।

(৩) LED সূত্র প্রয়োগ করে প্রত্যেক বুলীয় সংযৌগিক পদের বামে '$\exists$' নিয়ে এসো।

উদাহরণ

$$Ux\,(Gx \supset Hx) \cdot \exists x\,(Fx \cdot Gx)$$

$$U(G \supset H) \cdot \exists FG$$

$$\sim\exists G\bar{H} \cdot \exists FG \qquad [\text{ বিধান (১) }]$$

---

* Quantifier Exchange

দেখ, উপরোক্ত বাক্যে আছে তিনটি বিধেয় অক্ষর : F, G, H। আরও লক্ষণীয়, $\sim\exists G\bar{H}$-এতে F নেই ; কাজেই এতে F-এর অনুপ্রবেশ ঘটাতে হবে। সেরকম, $\exists FG$-এতে H-এর অনুপ্রবেশ ঘটানো দরকার! বলা বাহুল্য, এখন আমাদের এভাবে অগ্রসর হতে হবে।

$$[\sim\exists G\bar{H}(F \vee \bar{F})] \cdot [\exists FG(H \vee \bar{H})]$$

$\sim\exists(G\bar{H}F \vee G\bar{H}\bar{F}) \cdot \exists(FGH \vee FG\bar{H})$ [বিধান (২)]

$\sim\exists(FG\bar{H} \vee \bar{F}G\bar{H}) \cdot \exists(FGH \vee FG\bar{H})$ [Com.*]

$\sim(\exists FG\bar{H} \vee \exists\bar{F}G\bar{H}) \cdot (\exists FGH \vee \exists FG\bar{H})$ [বিধান (৩), LED] [I]

[এ বাক্যটি I দিয়ে চিহ্নিত করা হল।]

এবার উদাহরণ হিসাবে নেব কয়টি যুক্তি বা যুক্তি-আকার। ধর, আমাদের নিম্নোক্ত আকারের (প্রথম সংস্থানে AII-এর) বৈধতা পরীক্ষা করতে হবে।

$$Ux(Gx \supset Hx), \exists x(Fx \cdot Gx) \quad \therefore \quad \exists x(Fx \cdot Hx)$$

তার মানে, আমাদের নিম্নোক্ত অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকটির বৈধতা পরীক্ষা করতে হবে—

$$Ux(Gx \supset Hx) \cdot \exists x(Fx \cdot Gx)] \supset \exists x(Fx \cdot Hx)$$

বলা বাহুল্য, প্রথমে এ বাক্যটি এভাবে লিখতে হবে :

$$(\sim\exists G\bar{H} \cdot \exists FG) \supset \exists FH$$

পূর্বকল্পের অন্তর্গত বাক্যগুলিকে আগেই ঈপ্সিত বৈকল্পিকে রূপান্তরিত করা হয়েছে (I দেখ)। অনুকল্পটিকে অনুরূপভাবে রূপান্তরিত করা হল।

$$\exists FH(G \vee \bar{G})$$

$$\exists(FHG \vee FH\bar{G})$$

$$\exists(FGH \vee F\bar{G}H)$$

$$\exists FGH \vee \exists F\bar{G}H$$

কাজেই উক্ত প্রাকল্পিকটিকে রূপান্তরিত করে পাই

$[\sim(\exists FG\bar{H} \vee \exists\bar{F}G\bar{H}) \cdot (\exists FGH \vee \exists FG\bar{H})] \supset (\exists FGH \vee \exists F\bar{G}H)$ [II]

যে পদ্ধতিতে এরূপ রূপান্তর করা হয়, বলা বাহুল্য, তার নাম প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি।

এটা সহজবোধ্য যে উক্তরূপ বাক্য হল সত্যাপেক্ষ বাক্য। কাজেই সত্যাপেক্ষ যুক্তিবিজ্ঞানে বা বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানে ব্যবহৃত নির্ণয় পদ্ধতি দিয়েই এরূপ বাক্যের বৈধতা পরীক্ষা করা যায়।

* বর্ণানুক্রমে সাজানো হল।

আরও একটা কথা। সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি আলোচনা কালে আমরা বলেছি, বুলীয় পদের অন্তর্গত অক্ষরগুলিকে বিধেয় অক্ষর না ভেবে বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের বাক্য—আণবিক p, q ইত্যাদি—বলে কল্পনা করা যায়। যেমন, আমরা বলেছি,

$$\exists FG \supset \exists F(G \vee H)$$

এরকম বাক্যের সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করতে পারি

$$FG \supset F(G \vee H)$$

-এর F, G, H এদের স্বতন্ত্র বাক্য বলে কল্পনা করে। প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি প্রসঙ্গে আর একটা কথা বলছি। বলছি—প্রকোষ্ঠ বাক্যের সংযোগীগুলিকে, যথা $\exists FGH$-এর F, G, H-কে, পৃথক পৃথক বাক্য বলে কল্পনা করারও দরকার নেই। যে কোনো প্রকোষ্ঠ সাত্ত্বিক বাক্যকে একটি আণবিক বাক্য (p, q-এর মত বাক্য) বলে কল্পনা করতে বাধা নেই; যেমন, আমরা $\exists FGH$-কে p বলে, $\exists FGH$-কে q বলে, কল্পনা করতে পারি। বিভিন্ন প্রসঙ্গে কেবল নির্দিষ্ট সংখ্যক প্রকোষ্ঠ বাক্যই সম্ভব। এবং প্রকোষ্ঠ বাক্যগুলিকে সত্যসারণীর আকরস্তম্ভের অনুকরণে বিশেষ ক্রমে সাজানো যায়। কাজেই এক একটি প্রকোষ্ঠ বাক্যের সংক্ষেপক হিসাবে এক একটি (নির্দিষ্ট) বাক্যপ্রতীক—A, B, C ইত্যাদি ব্যবহার করা যায়।

নিচে প্রকোষ্ঠ বাক্যের দুটি তালিকা বিশেষ ক্রমে সাজিয়ে দেওয়া হল। এবং এদের কোন্‌টির বদলে কোন্ সংক্ষেপক প্রতীক ব্যবহার করা যায় (বা আমরা ব্যবহার করব বলে স্থির করেছি) তা বন্ধনীর মধ্যে দেখানো হল।

যে বাক্যে দুটি বিধেয় অক্ষর, F, G সে বাক্যের বেলায়	যে বাক্যে তিনটি বিধেয় অক্ষর, F, G, H সে বাক্যের বেলায়
$\exists FG$ (A)	$\exists FGH$ (A)
$\exists F\bar{G}$ (B)	$\exists FG\bar{H}$ (B)
$\exists \bar{F}G$ (C)	$\exists F\bar{G}H$ (C)
$\exists \bar{F}\bar{G}$ (D)	$\exists F\bar{G}\bar{H}$ (D)
	$\exists \bar{F}GH$ (E)
	$\exists \bar{F}G\bar{H}$ (F)
	$\exists \bar{F}\bar{G}H$ (G)
	$\exists \bar{F}\bar{G}\bar{H}$ (H)

৩. প্রকোষ্ঠ পদ্ধতির প্রয়োগ

আমাদের সমস্যা ছিল

$$(\sim\exists G\bar{H} \cdot \exists FG) \supset \exists FH$$

এ বাক্য বৈধ কি অবৈধ তা নির্ণয় করা। আমরা এ বাক্যকে বিশেষভাবে রূপান্তরিত করে পেয়েছি (পৃঃ ১৮৭) এ বাক্যটি :

$$[\sim(\exists FG\bar{H} \vee \exists \bar{F}G\bar{H}) \cdot (\exists FGH \vee \exists FG\bar{H})] \supset (\exists FGH \vee \exists F\bar{G}H)$$

এখন এ বাক্যটির অন্তর্ভুক্ত প্রকোষ্ঠ বাক্যগুলির জায়গায় প্রস্তাবিত সংক্ষেপক প্রতীক A, B, C ইত্যাদি বসিয়ে পাই এ বাক্য

$$[\sim(B \vee F) \cdot (A \vee B)] \supset (A \vee C)$$

এ রূপান্তর দেখে আমাদের বিস্মিত ও উল্লসিত হওয়ার কথা। কেননা এ বাক্যে মানকের বা বিধেয়ের নামগন্ধ নেই। এটা ত আমাদের পূর্বপরিচিত বাক্যযুক্তিবিজ্ঞানে-আলোচ্য বাক্য। বলা বাহুল্য, বাক্যযুক্তিবিজ্ঞানে-স্বীকৃত বিভিন্ন নির্ণয় পদ্ধতি দিয়েই এ বাক্যের বৈধতা পরীক্ষা করা যাবে।

নিচে কয়েকভাবে বাক্যটির বৈধতা-পরীক্ষা দেখানো হল। এর থেকে উক্তরূপ রূপান্তরের সুবিধা বোঝা যাবে।

আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ

$$[\sim(B \vee F). (A \vee B)] \supset (A \vee C)$$

$$[\sim(B \vee F). (1 \vee B)] \supset (1 \vee C) \qquad [\sim(B \vee F) \cdot (0 \vee B)] \supset 0 \vee C$$

$$[\sim(B \vee F) . 1] \supset 1 \qquad [\sim(B \vee F) \cdot B] \supset C$$

$$1 \qquad [\sim(1 \vee F). 1] \supset C \qquad [\sim(0 \vee F) \cdot 0] \supset C$$

$$\sim 1 \supset C \qquad 0 \supset C$$

$$0 \supset C \qquad 1$$

$$1$$

সংক্ষিপ্ত সত্যসারণী : Reductio

$$[\sim(B \vee F). (A \vee B)] \supset (A \vee C)$$

1 1 0	0 1 1	0 0	$\underline{ABCF}$
3 8 5	6 4 7	1 2	010

CNF

$$[\sim(B \vee F) \cdot (A \vee B)] \supset (A \vee C)$$

$$(B \vee F) \vee \sim(A \vee B) \vee (A \vee C)$$

$$[(A \vee C) \vee (B \vee F)] \vee \sim(A \vee B)$$

$$[(A \vee C \vee B \vee F] \vee (\sim A . \sim B)$$

$$(A \vee C \vee B \vee F \vee \sim A). (A \vee C \vee B \vee F \vee \sim B)$$

$$(\underline{A \vee \sim A} \vee B \vee C \vee F). (A \vee \underline{B \vee \sim B} \vee C \vee F)$$

Fell Swoop

ধর, $A \vee C = 0$

তাহলে $A = 0$, $C = 0$, এবং তাহলে

$$[\sim(B \vee F) \cdot (A \vee B)] \supset (A \vee C)$$
$$\sim(B \vee F) \cdot (0 \vee B)$$
$$\sim(B \vee F) \cdot B$$
$$\sim B \cdot \sim F \cdot B$$
$$B \cdot \sim B \cdot \sim F$$
$$0$$

দেখা গেল, আলোচ্য প্রাকল্পিকটি বৈধ, সুতরাং আলোচ্য যুক্তি-আকারটি বৈধ।

৪. প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি প্রয়োগের আরও উদাহরণ

প্রথম সংস্থানে AEE

$$\sim \exists G\bar{H}, \sim \exists FG \quad \therefore \quad \sim \exists FH$$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকটি নিয়ে পরপর ওটাকে রূপান্তরিত করা হল।

$$(\sim \exists \bar{G}H \cdot \exists FG) \supset \sim \exists FH$$
$$[\sim \exists G\bar{H}(F \vee \bar{F}) \cdot \sim \exists FG(H \vee \bar{H})] \supset \sim \exists FH(G \vee \bar{G})$$
$$[\sim \exists (G\bar{H}F \vee G\bar{H}\bar{F}) \cdot \sim \exists (FGH \vee FG\bar{H})] \supset \sim \exists (FHG \vee FH\bar{G})$$
$$[\sim \exists (FG\bar{H} \vee \bar{F}G\bar{H}) \cdot \sim \exists (FGH \vee FG\bar{H})] \supset \sim \quad FGH \vee F\bar{G}H)$$
$$[\sim (\exists FG\bar{H} \vee \exists \bar{F}G\bar{H}) \cdot \sim (\exists FGH \vee \exists FG\bar{H}) \supset \sim (\exists FGH \vee \exists F\bar{G}H)$$

সংক্ষেপক প্রতীক A, B ইত্যাদি (পৃঃ ১৮৮ দেখ) ব্যবহার করে শেষোক্ত বাক্যটিকে এভাবে লিখতে পারি :

$$[\sim(B \vee F) \cdot \sim(A \vee B)] \supset (A \vee C)$$

Fell Swoop

ধর, $A \vee C = 0$, তাহলে $A = 0$, $C = 0$। এ মূল্য পূর্বকল্পে বসিয়ে পাই

$$\sim(B \vee F) \cdot \sim A \vee B) \supset (A \vee C)$$
$$\sim(B \vee F) \cdot \sim(0 \vee B)$$
$$\sim(B \vee F) \cdot \sim B$$

$\sim(1 \vee F) \cdot \sim 1$	$\sim(0 \vee F) \cdot \sim 0$
$\sim 1 \cdot \sim 1$	$\sim F \cdot 1$
0	$\sim F$
	$0 \quad 1$

দেখা গেল, অনুকল্পটি মিথ্যা হলে পূর্বকল্পটি সত্যও হতে পারে। সুতরাং প্রাকল্পিকটি অবৈধ। সুতরাং প্রথম সংস্থানে AEE অবৈধ।

দ্বিতীয় সংস্থানে AII

$$\sim\exists H\bar{G}, \exists FG \therefore \exists FH$$

$$(\sim\exists H\bar{G} \cdot \exists FG) \supset \exists FH$$

$$[\sim\exists H\bar{G}(F \vee \bar{F}) \cdot \exists FG(H \vee \bar{H})] \supset \exists FH(G \vee \bar{G})$$

$$[\sim\exists H\bar{G}F \vee H\bar{G}\bar{F} \cdot \exists(FGH \vee FG\bar{H})] \supset \exists(FHG \vee FH\bar{G}$$

$$[\sim\exists(F\bar{G}H \vee \bar{F}\bar{G}H) \cdot \exists(FGH \vee FG\bar{H})] \supset \exists(FGH \vee F\bar{G}H)$$

$$[\sim(\exists F\bar{G}H \vee \exists\bar{F}\bar{G}H) \cdot (\exists FGH \vee \exists FG\bar{H})] \supset (\exists FGH \vee \exists F\bar{G}H)$$

শেষোক্ত বাক্যে A, B ইত্যাদি বসিয়ে পাই

$$[\sim(C \vee G) \cdot (A \vee B)] \supset (A \vee C)$$

Fell Swoop

ধর, $A \vee C=0$, তাহলে $A=0$, $C=0$। এ মূল্য পূর্বকল্পে বসিয়ে পাই

$$[\sim(C \vee G) \cdot (A \vee B)] \supset (A \vee C)$$

$$\sim(0 \vee G) \cdot (0 \vee B)$$

$$\sim G \cdot B$$

$$\sim 1 \cdot B \qquad \sim 0 \cdot B$$

$$0 \cdot B \qquad 1 \cdot B$$

$$0 \qquad B$$

$$1 \quad 0$$

Fell Swoop থেকে বোঝা গেল প্রাকল্পিকটি অবৈধ। সুতরাং দ্বিতীয় সংস্থানে AII অবৈধ।

Bramantip

$$\sim\exists H\bar{G}, \sim\exists G\bar{F} \therefore \exists FH$$

$$(\sim\exists H\bar{G} \cdot \sim\exists G\bar{F}) \supset \exists FH$$

$$[\sim\exists H\bar{G}(F \vee \bar{F}) \cdot \sim\exists G\bar{F}(H \vee \bar{H})] \supset \exists FH(G \vee \bar{G})$$

$$[\sim\exists(H\bar{G}F \vee H\bar{G}\bar{F}) \cdot \sim\exists(G\bar{F}H \vee G\bar{F}\bar{H})] \supset [\exists(FHG \vee FH\bar{G})]$$

$$[\sim\exists(F\bar{G}H \vee \bar{F}\bar{G}H) \cdot \sim\exists(\bar{F}GH \vee \bar{F}G\bar{H})] \supset \exists(FGH \vee F\bar{G}H)]$$

$$[\sim(\exists F\bar{G}H \vee \exists\bar{F}\bar{G}H) \cdot \sim(\exists\bar{F}GH \vee \exists\bar{F}G\bar{H})] \supset \exists FGH \vee (\exists F\bar{G}H)$$

সংক্ষেপে

$$[\sim(C \vee G) \cdot \sim(E \vee F)] \supset (A \vee C)$$

$$A=0, \quad C=0$$

$$[\sim(C \vee G) \cdot \sim(E \vee F)] \supset (A \vee C)$$

$$\sim(0 \vee G) \cdot \sim(E \vee F)$$

$$\sim G \cdot \sim(E \vee F)$$

$$\begin{array}{ll} \sim 1 \cdot \sim(E \vee F) & \sim 0 \cdot \sim(E \vee F) \\ 0 \cdot \sim(E \vee F) & 1 \cdot \sim(E \vee F) \\ 0 & \sim(E \vee F) \end{array}$$

$$\sim(1 \vee F) \qquad \sim(0 \vee F)$$

$$\sim 1 \qquad \sim F$$

$$0 \qquad \sim 1 \qquad \sim 0$$

$$0 \qquad 1$$

সর্ব দক্ষিনের 1 থেকে বোঝা গেল প্রাকল্পিকটি অবৈধ। সুতরাং Bramantip অবৈধ।

এবার আর যুক্তি বা যুক্তি-আকার নয়। সরাসরি বাক্যের বৈধতা বিচার করা যাক।

প্রশ্ন

$(\exists FG \vee \exists FH) \supset \exists F(G \vee H)$

এ বাক্যটি কি বৈধ? (Quine)

উত্তর

$(\exists FG \vee \exists FH) \supset \exists F(G \vee H)$

$\{\exists[FG(H \vee \bar{H})] \vee \exists[FH(G \vee \bar{G})]\} \supset \exists F(G \vee H)$

$\{\exists(FGH \vee FG\bar{H}) \vee \exists(FHG \vee FH\bar{G})\} \supset \ldots\ldots\ldots$

$\{\exists(FGH \vee FG\bar{H}) \vee \exists(FGH \vee F\bar{G}H)\} \supset \ldots\ldots\ldots$

$(\exists FGH \vee \exists FG\bar{H} \vee \exists FGH \vee \exists F\bar{G}H) \supset \ldots\ldots\ldots$

$(\exists FGH \vee \exists FG\bar{H} \vee \exists F\bar{G}H) \supset \exists F(G \vee H)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \supset \exists(FG \vee FH)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \supset \exists FG \vee \exists FH$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \supset \exists[FG(H \vee \bar{H})] \vee \exists[FH(G \vee \bar{G})]$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \supset \exists(FGH \vee FG\bar{H}) \vee \exists(FHG \vee FH\bar{G})$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \supset \exists(FGH \vee FG\bar{H}) \vee \exists(FGH \vee \exists F\bar{G}H)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \supset \exists FGH \vee \exists FG\bar{H} \vee \exists FGH \vee \exists F\bar{G}H)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \supset \exists FGH \vee \exists FG\bar{H} \vee \exists F\bar{G}H$

$(\exists FGH \vee \exists FG\bar{H} \vee \exists F\bar{G}H) \supset (\exists FGH \vee \exists FG\bar{H} \vee \exists F\bar{G}H)$

সর্বশেষ বাক্যটি $P \supset P$ আকারের, সুতরাং বৈধ।

আর একটা উদাহরণ।

$[\exists xFx \cdot \sim \mathrm{U}x(Fx \cdot Gx)] \supset$

$[\mathrm{U}x(Fx \supset Gx) \supset (\sim\exists xGx \vee \exists x\sim Fx)]$

এ বাক্যটি বৈধ না অবৈধ?

উত্তর

বাক্যটি এভাবে লেখা যায়

$(\exists F \cdot \sim \mathrm{U}FG) \supset [\mathrm{U}(F \supset G) \supset (\sim\exists G \vee \exists\sim F)]$ [1]

এ বাক্য থেকে পাই

$$[\exists F \cdot \exists \sim (FG)] \supset [\sim \exists \sim (F \supset G) \supset (\sim \exists G \vee \exists \sim F)] \qquad [2]$$

$$[\exists F \cdot \exists(\bar{F} \vee \bar{G})] \supset [\sim \exists \bar{F}\bar{G} \supset (\sim \exists G \vee \exists \sim F)] \qquad [3]$$

I II III IV V

বোঝাবার সুবিধার জন্য [3]-এর প্রত্যেক অঙ্গবাক্য I, II ইত্যাদি, পৃথক পৃথকভাবে নিয়ে তাতে ঈপ্সিত রূপ দেওয়া হল।

I. $\exists F = \exists FG \vee \exists F\bar{G}$

II. $\exists(\bar{F} \vee \bar{G}) = \exists \bar{F} \vee \exists \bar{G}$

$$\exists \bar{F} = \exists F\bar{G} \vee \exists \bar{F}\bar{G}$$

$$\exists \bar{G} = \exists F\bar{G} \vee \exists \bar{F}\bar{G}$$

$$\therefore \quad \exists(\bar{F} \vee \bar{G}) = \exists \bar{F}G \vee \exists \bar{F}\bar{G} \vee \exists F\bar{G} \vee \exists \bar{F}\bar{G}$$

$$= \exists F\bar{G} \vee \exists \bar{F}G \vee \exists \bar{F}\bar{G}$$

III-এর বিস্তারের প্রয়োজন নেই, কেননা III-তে দুটি বিধেয় অক্ষরই আছে।

IV. $\sim \exists G = \sim(\exists FG \vee \exists \bar{F}G)$

V. $\exists \bar{F} = \exists \bar{F}G \vee \exists \bar{F}\bar{G}$

[3]-এতে I, II, ইত্যাদি চিহ্নিত অংশের জায়গায় উপরোক্ত সমার্থকগুলি বসিয়ে পাই :

$$[\exists FG \vee \exists F\bar{G}) \cdot (\exists F\bar{G} \vee \exists \bar{F}G \vee \exists \bar{F}\bar{G})] \supset$$

$$\{\sim \exists \bar{F}\bar{G} \supset [\sim(\exists FG \vee \exists \bar{F}G) \vee (\exists \bar{F}G \vee \exists \bar{F}\bar{G})]\} \qquad [4]$$

আর [4]-এতে A, B ইত্যাদি সংক্ষেপক প্রতীক বসিয়ে পাই :

$$[(A \vee B) \cdot (B \vee C \vee D)] \supset \{\sim B \supset [\sim(A \vee C) \vee (C \vee D)]\} \qquad [5]$$

[5]-এর আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ

$$[(A \vee B) ; (B \vee C \vee D)] \supset \{\sim B \supset [\sim(A \vee C) \vee (C \vee D)]\}$$

প্রথম শাখা

$$[(A \vee 1) \cdot (1 \vee C \vee D)] \supset \{\sim 1 \supset [\sim(A \vee C) \vee (C \vee D)]\}$$

$$(1 \cdot 1) \supset \{0 \supset [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

$$1 \supset 1$$

$$1$$

দ্বিতীয় শাখা

$[(A \vee 0) \cdot (0 \vee C \vee D)] \supset \{ \sim 0 \supset \ldots\ldots\ldots$

$((A \cdot (C \vee D)] \supset \{1 \supset \ldots\ldots$

$[A \cdot (C \vee D)] \supset [\sim(A \vee C) \vee (C \vee D)]$

$[A \cdot (1 \vee D)] \supset [\sim(A \vee 1) \vee 1 \vee D]$ $[A \cdot (0 \vee D)] \supset [\sim(A \vee 0) \vee 0 \vee D]$

$(A \cdot 1) \supset 1$ $(A \cdot D) \supset (\sim A \vee D)$

1 $(1 \cdot D) \supset (\sim 1 \vee D)$ $(0 \cdot D) \supset (\sim 0 \vee D)$

$D \supset (0 \vee D)$ $0 \supset 1$

$D \supset D$ 1

1

সিদ্ধান্ত ঃ প্রদত্ত বাক্যটি বৈধ (কেননা [5] বৈধ)।

৫. প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি ও সত্যসারণী

আমরা দেখেছি,

যে কোনো বিধেয় বাক্যকে বা বিধেয়-বাক্য-দিয়ে-গঠিত যৌগিক (সত্যাপেক্ষ) বাক্যকে এমন বাক্যে রূপান্তরিত করা যায় যাতে

বিধেয় বাক্যটি বা যৌগিকের অঙ্গবাক্যগুলির প্রত্যেকটি এক একটি বৈকল্পিক বাক্য, যার

বিকল্পগুলির প্রত্যেকটি এক একটি প্রকোষ্ঠ সাত্ত্বিক বাক্য।

আরও দেখেছি,

প্রকোষ্ঠ সাত্ত্বিক বাক্যগুলিকে বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের আণবিক বাক্য p, q ইত্যাদি বলে গণ্য করা যায়,

(আমরা অবশ্য প্রকোষ্ঠ সাত্ত্বিক বাক্যের জায়গায় A, B ইত্যাদি ব্যবহার করেছি) এবং ফলে

বাক্যযুক্তিবিজ্ঞানে স্বীকৃত নির্ণয় পদ্ধতি দিয়েই এরূপ বাক্যের, বিধেয় বাক্যের, বৈধতা পরীক্ষা করা যায়।

বস্তুত এ রকম বাক্যের বৈধতা পরীক্ষার জন্য আমরা আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ, Fell Swoop (পক্ষ পাতন) ও সংক্ষিপ্ত সত্যসারণী ঃ Reductio প্রয়োগ করেছি। কিন্তু লক্ষ করে থাকবে, একটা অতি সরল পদ্ধতি আমরা সযত্নে এড়িয়ে গেছি। বুঝতে পারছ, বলছি সত্যসারণী পদ্ধতির কথা।

তাহলে প্রশ্ন ওঠে : বিধেয় বাক্যের বৈধতা নির্ণয়ের কাজে সত্যসারণী পদ্ধতি কি প্রয়োগ করা যায় না ? উত্তর : যায় ; তবে, আমরা এখনি দেখতে পাব—যদি কোনো বাক্যে দুটির বেশী বিধেয় অক্ষর থাকে তাহলে এ পদ্ধতি অচল, কেননা এ রকম ক্ষেত্রে সত্যসারণী অনেক সময় এমন বিশাল আকার ধারণ করবে যে তা গঠন করা প্রায় পণ্ডশ্রম। যেমন, আমরা দেখতে পাব, যে বাক্যে তিনটি বিধেয় অক্ষর তার সত্যসারণীতে থাকতে পারে ২৫৬টি সারি। প্রশ্ন হচ্ছে, কেন এমন হয় ?

সাধারণ সত্যসারণীর সঙ্গে প্রস্তাবিত সত্যসারণীর (বিধেয় বাক্যের সত্যসারণীর) তুলনা করলে এ প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যাবে। আমরা জানি, যদি n দিয়ে আণবিক বাক্যের সংখ্যা বোঝানো হয় তাহলে সাধারণ সারণীর আকর স্তম্ভে থাকবে 2^n সারি। যেমন

১টি আণবিক বাক্য দিয়ে গঠিত বাক্যের সারণীতে থাকবে ২^১ বা ২টি সারি
২টি „ „ „ „ „ „ „ ২^২ বা ৪টি সারি
৩টি „ „ „ „ „ „ „ ২^৩ বা ৮টি সারি

বিধেয় বাক্যের বেলায় সত্যসারণী কী রূপ নিতে পারে? দেখা যাবে, এখানে মোট সারি সংখ্যা হতে পারে ২$^{২^n}$ (n হল বিধেয় অক্ষরের সংখ্যা)। এখন নিচের সারণীটির দিকে নজর দাও।

বিধেয় অক্ষরের সংখ্যা	প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্যের সংখ্যা	সম্ভবপর সারি সংখ্যা
১	২	২$^{২^১}$ বা ৪
২	৪	২$^{২^২}$ বা ১৬
৩	৮	২$^{২^৩}$ বা ২৫৬

এ সারণীতে যা বলা হল তা আর একটু বিশদ করে বলা যাক। ধর, ব একটি বিধেয় বাক্য*। মনে কর, এ বাক্যে আছে একটি বিধেয় অক্ষর : F। এ বাক্য প্রসঙ্গে সম্ভব দুটি প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য : $\exists F, \exists \bar{F}$। ধর, ব-কে ঈপ্সিত আকারে রূপান্তরিত করে দেখা গেল, তাতে আছে $\exists F$, $\exists \bar{F}$। তাহলে ব-এর আকরে থাকবে দুটি স্তম্ভ আর চারটি সারি, এবং আকরটি এ রূপ ধারণ করবে :

আকর ১

$\exists F$	$\exists \bar{F}$
1	1
1	0
0	1
0	0

লক্ষণীয়

১টি বিধেয় বিশিষ্ট বাক্যের সত্যসারণীর আকরে মূল্য-বিন্যাস আর ২টি আণবিক (যেমন p, q) দিয়ে গঠিত সত্যসারণীর আকরে মূল্য-বিন্যাস এক রকম হতে পারে।

ধর, ভ একটি বিধেয় বাক্য*। মনে কর, এ বাক্যে আছে দুটি বিধেয় অক্ষর : F, G। এ বাক্য প্রসঙ্গে সম্ভব চারটি প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য : $\exists FG, \exists F\bar{G}, \exists \bar{F}G, \exists \bar{F}\bar{G}$। ধর,

* বা এমন সত্যাপেক্ষ যার অঙ্গগুলি বিধেয় বাক্য।

ভ-কে ঈপ্সিত আকারে রূপান্তরিত করে দেখা গেল তাতে আছে এ চারটি প্রকোষ্ঠ সাত্ত্বিক বাক্য*। তাহলে ভ-এর সত্যসারণীর আকরে থাকবে চারটি স্তম্ভ আর ষোলটি সারি। এবং আকরটি এ রূপ ধারণ করবে।

আকর ২

$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$	
1	1	1	1	
1	1	1	0	
1	1	0	1	
1	1	0	0	
1	0	1	1	
1	0	1	0	
1	0	0	1	
1	0	0	0	
0	1	1	1	
0	1	1	0	
0	1	0	1	
0	1	0	0	
0	0	1	1	
0	0	1	0	
0	0	0	1	
0	0	0	0	

লক্ষণীয়

২টি বিধেয় বিশিষ্ট বাক্যের সত্যসারণীর আকরে যতগুলি স্তম্ভ হতে পারে ৪টি আণবিক (যেমন p, q, r, s) দিয়ে গঠিত সত্যসারণীর আকরেও ততগুলি স্তম্ভ থাকে।

* ভ-কে ঈপ্সিত আকারে রূপান্তরিত করলে তাতে সব কয়টি প্রকোষ্ঠ বাক্য যে থাকবে এমন কথা নেই। যথা, $\exists FG \supset \exists(F \vee G)$-কে রূপান্তরিত করে পাই $\exists FG \supset (\exists FG \vee \exists F\bar{G} \vee \exists \bar{F}G)$। এতে আছে তিনটি প্রকোষ্ঠ বাক্য (সংক্ষেপক ব্যবহার করলে, *A*, *B*, *C*)। সুতরাং এ বাক্যের সারণীর আকরে থাকবে তিনটি স্তম্ভ আর আটটি সারি।

ধর, কোনো সত্যাপেক্ষ বাক্যে আছে

p, q, r, s, t, u, v, w

এ আটটি আণবিক বাক্য। এ বাক্যের সত্যসারণী গঠন করলে তাতে কয়টি সারি থাকত ? থাকত $২^৮$ বা ২৫৬টি সারি। মনে কর, ম বাক্যে আছে তিনটি বিধেয় অক্ষর : F, G, H। এ বাক্য প্রসঙ্গে সম্ভব আটটি প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য। এখন ম-কে ঈপ্সিত আকারে রূপান্তরিত করে যদি দেখা যায়, রূপান্তরে আটটি প্রকোষ্ঠ বাক্যই আছে তাহলে (p, q, r, s, t, u, v, w দিয়ে গঠিত সত্যাপেক্ষকের মত) এর সত্যসারণীতেও ২৫৬টি সারি থাকার কথা। বস্তুত ম-এর মত বাক্যকে ঈপ্সিত আকারে আনলে তাতে আটের চেয়ে অনেক কম সংখ্যক প্রকোষ্ঠ বাক্য থাকতে পারে। উদাহরণ

$$(\exists FG \cdot \exists FH) \supset \exists F(G \vee H)$$

-কে রূপান্তরিত করে যে বাক্য পেয়েছি (পৃঃ ১৯২ দ্রষ্টব্য) তাতে আছে তিনটি প্রকোষ্ঠ বাক্য (সংক্ষেপক ব্যবহার করে বলতে পারি : A, B, C)। সুতরাং এ বাক্যের সারণীতে থাকবে আটটি সারি।

$$(\sim \exists H\bar{G} \cdot \exists FG) \supset \exists FH$$

-কে রূপান্তরিত করে পেয়েছি এ বাক্য (পৃঃ ১৮৯ দ্রষ্টব্য) :

$$[\sim \exists FG\bar{H} \vee \exists \bar{F}G\bar{H}) \cdot \exists(FGH \vee \exists FG\bar{H})] \supset (\exists FGH \vee \exists F\bar{G}H)$$

বা সংক্ষেপে

$$[\sim(B \vee F) \cdot (A \vee B)] \supset (A \vee C)$$

এতে আছে চারটি প্রকোষ্ঠ বাক্য। সুতরাং এ বাক্যের সারণীতে থাকবে ষোলটি সারি।

Bramantip-এর অনুষঙ্গী প্রাকল্পিককে রূপান্তরিত করে যে বাক্য পেয়েছি (পৃঃ ১৯১ দ্রষ্টব্য) তার সংক্ষিপ্ত রূপ হল

$$[\sim(C \vee G) \cdot \sim(E \vee F)] \supset (A \vee C)$$

এতে আছে পাঁচটি আণবিক বাক্য (যার প্রত্যেকটি আসলে এক একটি প্রকোষ্ঠ বাক্যের সংক্ষিপ্ত রূপ)। বলা বাহুল্য, এর সত্যসারণীতে থাকবে বত্রিশটা সারি।

আমরা সাধারণ সত্যসারণী (বাক্যযুক্তিবিজ্ঞান-অনুমোদিত সত্যসারণী) আর বিধেয় বাক্যের সত্যসারণীর সাদৃশ্যের কথা বলেছি। যেমন বলেছি,

p, q দিয়ে গঠিত সত্যাপেক্ষ বাক্যের সারণীর, আর

$\exists F, \exists \bar{F}$ দিয়ে গঠিত বাক্যের সারণীর

আকরে সত্যমূল্য বিন্যাস এক রকম।

এরকম উক্তির বিরুদ্ধে আপত্তি ওঠার কথা। আপত্তিটি কী দেখা যাক।

আপত্তি :

(১) p, q ইত্যাদি, আর (২) $\exists F, \exists \bar{F}, \exists FG$ ইত্যাদি—এদের মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। p, q স্বতন্ত্র বাক্য, কাজেই এদের উভয়ই মিথ্যা (বা উভয়ই সত্য, বা একটি- সত্য অন্যটি মিথ্যা) হতে পারে। কিন্তু $\exists F, \exists \bar{F}$ স্বতন্ত্র বাক্য নয়, এরা

পরস্পরের অনুবিষম (subcontrary)—এদের উভয়ই মিথ্যা হতে পারে না, মানে একটি মিথ্যা হলে অন্যটি সত্য। F (ধর, শ্বেত বস্তু) আছে অথবা $\bar{F}$ (অশ্বেত বস্তু)—আছে এ বাক্য দুটির একটি সত্য ; F না থাকলে $\bar{F}$ আছে, $\bar{F}$ না থাকলে F থাকবে। এ কথাটা এভাবেও বলতে পারি

$\exists F \vee \exists \bar{F}$ —এ বাক্য স্বতসত্য

ওপরে যা বলা হল তার থেকে এ কথাটা নিঃসৃত হয় : $\exists F$, $\exists \bar{F}$ দিয়ে, গঠিত বাক্যের সত্যসারণীর আকরে 00 বিন্যাস [আকর ১-এর সর্বশেষ সারি] থাকতে পারে না। যদি আকর ১ বজায় রেখে $\exists F \vee \exists \bar{F}$-এর সারণী গঠন করতে হত তাহলে বলতে হত $\exists F \vee \exists \bar{F}$ পরতসাধ্য বাক্য—যা মিথ্যা হবে যদি এর দুটি বিকল্পই মিথ্যা হয়। কাজেই $\exists F \vee \exists \bar{F}$-এর সারণী নেবে এ রূপ (এতে থাকবে তিনটি সারি) :

$\exists F$	$\exists \bar{F}$	$\exists F \vee \exists \bar{F}$
1	1	1
1	0	1
0	1	1

যে বাক্যে দুটি বিধেয় অক্ষর, F, G (বা ততোধিক বিধেয় অক্ষর) তার বেলায়ও অনুরূপ আপত্তি উঠবে।

(১) p, q, r, s-এর সঙ্গে

(২) $\exists FG$, $\exists F\bar{G}$, $\exists \bar{F}G$, $\exists \bar{F}\bar{G}$-এর

গুরুত্বপূর্ণ পার্থক্য আছে। (১)-এর বাক্যগুলি স্বতন্ত্র, সুতরাং যুগপৎ মিথ্যা হতে পারে, সুতরাং $p \vee q \vee r \vee s$-ও মিথ্যা হতে পারে (বস্তুত আকর ২-এর সর্বশেষ সারিতে এর সত্যমূল্য হবে 0 ; কিন্তু

$\exists FG \vee \exists F\bar{G} \vee \exists \bar{F}G \vee \exists \bar{F}\bar{G}$ —এ বাক্য স্বতসত্য

কেননা এটা বৈকল্পিক বাক্য এবং এর বিকল্পগুলি সর্বগ্রাহী। ধর, F=শ্বেত, G=পুষ্প। যদি এমন হয় যে FG (শ্বেত পুষ্প) নেই, তাহলে এমন বস্তু থাকবে যা $F\bar{G}$ (শ্বেত অপুষ্প) বা $\bar{F}G$ (অশ্বেত পুষ্প) বা $\bar{F}\bar{G}$ (অশ্বেত-অপুষ্প)। মানে, উক্ত প্রকোষ্ঠ বাক্যগুলির একটি অন্যগুলি দিয়ে গঠিত বৈকল্পিকের অনুবিষম। যেমন

$\exists FG$ আর $\exists F\bar{G} \vee \exists \bar{F}G \vee \exists \bar{F}\bar{G}$

পরস্পরের অনুবিষম। কাজেই উক্ত চারটি প্রকোষ্ঠ বাক্য দিয়ে গঠিত সত্যাপেক্ষকের সত্যসারণীর আকরে 0000 [আকর ২-এর সর্বশেষ সারি] থাকতে পারে না। যদি আকর ২ বজায় রেখে $\exists FG \vee \exists F\bar{G} \vee \exists \bar{F}G \vee \exists \bar{F}\bar{G}$-এর সারণী গঠন করতে হত তাহলে বলতে হত—এ বাক্যটি পরতসাধ্য, যা মিথ্যা হবে যদি প্রত্যেকটি প্রকোষ্ঠ বাক্য মিথ্যা হয়। কিন্তু উক্ত বৈকল্পিকটি স্বতসত্য। তার মানে, এ বাক্যের সত্যসারণীতে ষোলটি সারি থাকতে পারে না, থাকবে পনেরটি সারি।

আমরা এ আপত্তি আপাতত মেনে নিলাম ; মেনে নিলাম যে : বিধেয় বাক্যের বা বিধেয় বাক্য দিয়ে গঠিত সত্যাপেক্ষকের সত্যসারণীতে সারি সংখ্যা 2^{2^n} (n=বিধেয় অক্ষর সংখ্যা) হতে পারে না ; হতে পারে $2^{2^n}-1$ ।

তবে একটা কথা। যে বাক্যের রূপান্তরে সব সম্ভবপর প্রকোষ্ঠ বাক্য থাকে কেবল তার বেলাতেই এ কথা খাটে যে : সব প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্যের সত্যমূল্য 0 হতে পারে না (নিচে উদাহরণ ১ দেখ)। কিন্তু যে বাক্যের রূপান্তরে সব প্রকোষ্ঠ বাক্য নেই তার সত্যসারণীর আকরের সর্বশেষ সারিতে কেবল 0 থাকতে বাধা নেই (পরের পৃষ্ঠায় উদাহরণ ২ দেখ)।

উদাহরণ ১

ধর, সত্যসারণী পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত বাক্যের বৈধতা নির্ণয় করতে হবে ।

$$(\exists F \cdot \sim UFG) \supset [U(F \supset G) \supset (\sim\exists G \vee \exists\sim F)]$$

এ বাক্যকে রূপান্তরিত করে এবং প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্যের জায়গায় A, B ইত্যাদি বসিয়ে পাওয়া যাবে এ বাক্য (পৃঃ ১৯৩ দেখ) :

$$[(A \vee B) \cdot (B \vee C \vee D)] \supset \{\sim B \supset [\sim(A \vee C) \vee (C \vee D)]\}$$

এখন এ বাক্যের সত্যসারণী গঠন করা যাক।

A	B	C	D	(A v B)	·	(B v C v D)	⊃	{~B	⊃	[~(	A v C)	v	(C v D)]}
1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
				1	3	2	10	8	9	5	4	7	6

লক্ষণীয়, এর আকরে নিম্নোক্ত সারিটি নেই

A	B	C	D
0	0	0	0

সত্যসারণীটি থেকে বোঝা যায়, মূল বাক্যটি বৈধ, স্বতসত্য।

উদাহরণ ২

ধর, আমাদের লক্ষ্য হল সত্যসারণী পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত বাক্যটির বৈধতা পরীক্ষা :

$$(\sim \exists G\bar{H} \cdot \exists FG) \supset \exists FG$$

এ বাক্যকে ঈপ্সিত আকারে রূপান্তরিত করে এবং প্রকোষ্ঠ বাক্যের জায়গায় A, B ইত্যাদি বসিয়ে পাওয়া যাবে এ বাক্য (পৃঃ ১৮৯ দেখ) :

$$[\sim(B \vee F) \cdot (A \vee B)] \supset (A \vee C)$$

এখন এ বাক্যটির সত্যসারণী গঠন করা যাক।

A	B	C	F	~	(B ∨ F)	·	(A ∨ B)	⊃	(A ∨ C)
1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
				2	1		3	5	4

এ সত্যসারণী থেকে বোঝা যায়, মূল বাক্যটি বৈধ।

উদাহরণ ১ আর ২ তুলনা কর। দুটো উদাহরণের আকরের শীর্ষে আছে চারটি করে বাক্য (যেগুলির প্রত্যেকটি এক একটি প্রকোষ্ঠ বাক্যের সংক্ষিপ্ত রূপ)। উদাহরণ ১-এতে ১৫টি সারি, ২-এতে কিন্তু ১৬টি সারি। উদাহরণ ১-এতে কেন ১৬টি সারি থাকতে পারে না, কেন এর আকরে 0000—এ বিন্যাস থাকতে পারে না, তা আগেই বলেছি ; বলেছি

$$A\,(\exists FG),\quad B\,(\exists F\bar{G},\quad C\,(\exists \bar{F}G),\quad D\,(\exists \bar{F}\bar{G})$$

এ বাক্যগুলি একসঙ্গে মিথ্যা হতে পারে না। উদাহরণ ২-এতে কিন্তু ১৬টি সারি, আর এর আকরের সর্বশেষ ছত্রে মূল্য-বিন্যাস হল

$$\frac{A \quad B \quad C \quad D}{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}$$

২-এর বেলায় এ বিন্যাস অনুমোদন করি কেন? করি—এ হেতু · ২-এর বেলায় A, B, C, D এদের যুগপৎ মিথ্যা হতে বাধা নেই। কেন নেই, দেখ। ২-এতে যে বাক্যের সত্যসারণী গঠন করা হয়েছে তাতে আছে তিনটি অক্ষর এবং এক্ষেত্রে সম্ভবপর প্রকোষ্ঠ সাত্তিক বাক্য হল

$$A : \exists FGH,\ B : \exists FG\bar{H},\ C : \exists F\bar{G}H,\ D : \exists F\bar{G}\bar{H}$$

$$E : \exists \bar{F}GH,\ F : \exists \bar{F}G\bar{H},\ G : \exists \bar{F}\bar{G}H,\ H : \exists \bar{F}\bar{G}\bar{H}$$

এ আটটি বাক্য যুগপৎ মিথ্যা হতে পারে না, মানে

$$\exists FGH \vee \exists FG\bar{H} \vee \exists F\bar{G}H \vee \exists F\bar{G}\bar{H} \vee \exists \bar{F}GH \vee \exists \bar{F}G\bar{H} \vee \exists \bar{F}\bar{G}H \vee \exists \bar{F}\bar{G}\bar{H}$$

এ বাক্য বা সংক্ষেপে

$$A \vee B \vee C \vee D \vee E \vee F \vee G \vee H$$

এ বাক্য মিথ্যা হতে পারে না। কিন্তু এদের কয়েকটির, এমনকি একসঙ্গে সাতটির, মিথ্যা হতে বাধা কোথায়? কাজেই এমন হতে পারে যে

$$A \vee B \vee C \vee D$$

মিথ্যা, মানে

$$\frac{A \quad B \quad C \quad D}{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}$$

দেখ, ২-এর আকরের সর্বশেষ সারিতে এ সত্যমূল্য বিন্যাসই আছে।

প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি প্রসঙ্গে সত্যসারণীর কথা বলা হল শুধু সত্যসারণীর প্রয়োগ দেখাবার জন্য, এটা দেখাবার জন্য যে—বিধের যুক্তিবিজ্ঞানে নির্ণয় পদ্ধতি হিসাবে সত্যসারণীও ব্যবহার করা যায়। বিধের বাক্য বা যুক্তির বেলায় এ পদ্ধতি কি করে প্রয়োগ করা যায়—তা শিখে রাখলে, এটা ভাল কথা। কিন্তু বিধের বাক্য বা বিধের যুক্তির বৈধতা পরীক্ষার কাজে সত্য-

সারণীর সাহায্য না নেওয়াই ভাল। কেননা এ কাজে সত্যসারণী গঠন করা খুব সহজ নয়, আর সত্যসারণী দিয়ে অনেক পরিশ্রম করে যে ফল পেলে অন্য উপায়ে, যথা Fell Swoop, Reductio, আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ দিয়ে, তা অনেক সহজে পাওয়া যায়। তারপর, যে সব বাক্যের বিধেয় সংখ্যা তিন বা তার বেশী সে রকম অনেক বাক্যের সত্যসারণী গঠন করা প্রায় অসম্ভব ব্যাপার। এ কথা বলে সত্যসারণীর কথা এখানে শেষ করা যেত। কিন্তু প্রাসঙ্গিক একটা তাত্ত্বিক কথা এখনও বলা হয় নি।

৬. বৈধতা ও প্রসঙ্গ বিশ্ব

কিছুক্ষণ আগে একটা আপত্তি প্রসঙ্গে বলা হযেছিল যে ঃ

$$\exists F \vee \exists \bar{F} \quad [1]$$

$$\exists FG \vee \exists F\bar{G} \vee \exists \bar{F}G \vee \exists \bar{F}\bar{G} \quad [2]$$

$$\exists FGH \vee \exists FG\bar{H} \vee \exists FGH \vee \exists F\bar{G}\bar{H} \vee \exists \bar{F}GH \vee \exists \bar{F}G\bar{H} \vee \exists \bar{F}GH \vee \exists F\bar{G}\bar{H} \quad [3]$$

—এ সব বাক্য বৈধ।

এ কথাটা কিন্তু নিঃশর্তভাবে সত্য নয়। কথাটা সত্য বলে মানা যায় একটা শর্তে : যদি এটা আমাদের পূর্ব-স্বীকৃতি হয়, মানে এ কথা ধরে নিই, যে

প্রসঙ্গ বিশ্বটি অশূন্য।

যদি এ পূর্ব-স্বীকৃতি মেনে না নিই তাহলে উক্তরূপ বাক্যের বৈধতার দাবী টেকে না। কথাটা ব্যাখ্যা করা যাক।

কোন্ শ্রেণী সম্পর্কে উক্তি করছি অনেক সময় তা স্পষ্টভাবে উল্লেখ করা হয় না। তবে প্রসঙ্গ থেকে বোঝা যায়, কোন্ শ্রেণী সম্পর্কে উক্তি করা হচ্ছে। ধর, নিমন্ত্রণ বাড়িতে কেউ বলল : 'সবাই এখনও আসে নি', বা 'সবাই এসে গেছে' এখানে স্পষ্টতই নিমন্ত্রিত শ্রেণী সম্পর্কে বলা হয়েছে। সেরকম যখন বলি "সব কিছুই রঙিন" তখন কেবল জড় দ্রব্যের কথাই বলা হয়। এ রকম শ্রেণীকে বলে প্রসঙ্গ বিশ্ব। যেমন ওপরের প্রথম উদাহরণে প্রসঙ্গ বিশ্ব হল নিমন্ত্রিত শ্রেণী। আর দ্বিতীয় উদাহরণে জড় দ্রব্য নামক শ্রেণী।

আমরা বলেছি, (1), (2), (3)-এর মত বাক্য* বৈধ। উদাহরণ হিসাবে আবার নেওয়া যাক (1) ঃ $\exists F \vee \exists \bar{F}$। এ বাক্যটি বৈধ। এ উক্তি করলে বলা হয় ঃ কোনো কিছু F না হলে তা অবশ্যই $\bar{F}$, (সুতরাং) F যদি না থাকে তাহলে অবশ্যই $\bar{F}$ থাকবে। যে প্রসঙ্গ বিশ্বের বেলায় এ উক্তি করা হচ্ছে, মানে যে শ্রেণী সম্পর্কে বলা হচ্ছে যে অন্তত

*মানে, যে বৈকল্পিক বাক্যে থাকে প্রাসঙ্গিক সব প্রকোষ্ঠ সাত্ত্বিক বাক্য

একটা সভ্য F অথবা অন্তত একটা সভ্য $\bar{F}$, ধর, তা শূন্যগর্ভ। ধর, এ শ্রেণীটি, আমাদের প্রসঙ্গ বিশ্ব, হল মুক্ত পুরুষ (এবং ধরে নেওয়া যাক, মুক্ত পুরুষ বলে কিছু নেই)। আবার, মনে কর, F = সর্বজ্ঞ। তাহলে, F আছে—এ উক্তি করলে বলা হয়ঃ সর্বজ্ঞ মুক্ত পুরুষ আছে, $\bar{F}$ আছে বললে বলা হয়ঃ অসর্বজ্ঞ মুক্ত পুরুষ আছে। যেহেতু মুক্ত পুরুষ শ্রেণীটি শূন্য, $\exists F$-ও মিথ্যা, $\exists \bar{F}$-ও মিথ্যা। এ বাক্য দুটি এক্ষেত্রে অনুবিষম বলে গণ্য নয়। অথচ প্রসঙ্গ বিশ্বটি যদি অশূন্য হত, এতে যদি একটিও সভ্য (একজনও মুক্ত পুরুষ) থাকত তাহলে $\exists F$ আর $\exists \bar{F}$-এদের উভয়ই মিথ্যা হতে পারত না ; এবং $\exists F \vee \exists \bar{F}$—এ বাক্য স্বতসত্য বা বৈধ হত।

দেখা গেল, $\exists F \vee \exists \bar{F}$ বৈধ হতে পারে যদি প্রসঙ্গ বিশ্বটি অশূন্য হয়। প্রসঙ্গ বিশ্ব শূন্য হলে (2)-এর প্রত্যেকটি বিকল্প হবে মিথ্যা, ফলে (2) হবে অবৈধ। (3)-এর বেলাতেও এ রকম কথা খাটে। দেখা গেল, (1), (2), (3) বা এরকম* বাক্যের বৈধতা নির্ভর করে প্রসঙ্গ বিশ্বের প্রকৃতির ওপর—প্রসঙ্গ বিশ্ব অশূন্য হলে বাক্যগুলি বৈধ, নতুবা অবৈধ।

বিধেয় বাক্যের বৈধতার সঙ্গে প্রসঙ্গ বিশ্বের প্রকৃতির ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক—এ কথার সমর্থনে নিচে আরও দু-একটা কথা বলা হল।

একটা প্রশ্ন।

$$\exists xFx \supset \text{U}xFx$$

বা আমাদের গৃহীত লিপিতে

$$\exists F \supset \text{U}F \qquad \text{(I)}$$

—এ (আকারের) বাক্য বৈধ না অবৈধ ?

এর উত্তরে তোমরা নিশ্চয়ই বলবেঃ অবৈধ। বলবেঃ একটা বা অন্তত একটা বস্তু F হলে সব বস্তুই F হবে কেন ? এমনও ত হতে পারে একটা বস্তু F বাকি সবগুলি $\bar{F}$। কথাটা ঠিক। তবে এখানে একটা 'কিন্তু' আছে।

এমন প্রসঙ্গ বিশ্ব নাও যাতে আছে কেবল একটি সভ্য (ধর, বিশ্বে কেবল একজন মহাত্মা আছে)। এ রকম প্রসঙ্গ বিশ্বে (যাতে আছে কেবল একটি মাত্র ব্যক্তি) উক্ত বাক্যটি কিন্তু বৈধ। একজন মহাত্মা আছে—এ বাক্য যদি সত্য হয় তাহলে, সবাই মহাত্মা —এ বাক্যও সত্য ; কেননা 'সবাই' বলতে এখানে ত বোঝাচ্ছে কেবল একজনকে। কিন্তু যে প্রসঙ্গ বিশ্ব কল্পনা করা হল তাতে যদি একের বেশী সভ্য (যেমন দুটি সভ্যও) থাকে তাহলে I মিথ্যা হয়ে যেতে পারে। কেননা এমন হতে পারে একটি সভ্য F অন্যটি (বা অন্যগুলি) F নয়, এবং তাহলেঃ সবাই F [UF]—এ বাক্য মিথ্যা হয়ে যাবে। মানে সেক্ষেত্রে এমন হবে যে $\exists F \supset \text{U}F$-এর পূর্বকল্প সত্য, অনুকল্প মিথ্যা। দেখা গেল, I বৈধ হবে যদিঃ (১) প্রসঙ্গ বিশ্ব অশূন্য হয়, এবং (২) সে বিশ্বে থাকে কেবল একটি মাত্র সভ্য।

এবার এ বাক্যটি দেখ :

$$UF \supset \exists F \qquad \text{(II)}$$

এটা সহজবোধ্য যে, এ বাক্য বৈধ যেকোনো অশূন্য প্রসঙ্গ বিশ্বে। মানে, ঐ অশূন্য বিশ্বে এক বা একাধিক (যে কোনো সংখ্যক বা অসংখ্য) সভ্য থাক না কেন, বাক্যটি বৈধ। কিন্তু যদি প্রসঙ্গ বিশ্বটি শূন্য হয় তাহলে II মিথ্যা হবে। কেন, দেখ। সেক্ষেত্রে

এ বাক্যের অনুকল্প $\exists F$ হবে মিথ্যা। (ক)

শুধু $\exists F$ কেন, শূন্য প্রসঙ্গ-বিশ্বে $\exists \bar{F}$-ও মিথ্যা। আর তাহলে $\exists F$ আর $\exists \bar{F}$-এর নিষেধ, $\sim\exists F$ আর $\sim\exists \bar{F}$ হবে সত্য।

$$\sim\exists \bar{F} = \sim\exists\sim F = UF \qquad \text{(QE সূত্র)}$$

তাহলে $\sim\exists \bar{F}$ সত্য—এ কথার মানে UF সত্য, এবং তাহলে

II-এর পূর্বকল্প UF সত্য (খ)

পূর্বকল্প সত্য, অনুকল্প মিথ্যা বলে [(ক), (খ) দ্রষ্টব্য] II মিথ্যা, মিথ্যা—শূন্য-প্রসঙ্গ বিশ্বে।

আর একটা বাক্য :

$$UFG \supset UF \qquad \text{(III)}$$

এ বাক্যের বক্তব্য : যদি প্রত্যেক বস্তুতেই F এবং G ধর্ম থাকে তাহলে প্রত্যেকটি বস্তুতে F ধর্মটি থাকবে। স্পষ্টতই এ বাক্যটি বৈধ। এ কথা যদি সত্য হয় যে সব কিছুতে দুটো ধর্ম F, G আছে তাহলে এ কথা মিথ্যা হতে পারে না যে, সব কিছুতেই দুটো ধর্মের একটা, F, আছে। এর সঙ্গে তুলনীয় : $(p \cdot q) \supset p$—এ বাক্যটি বৈধ। লক্ষণীয়, $(p \cdot q) \supset p$ -এর মত, এ বাক্য নিঃশর্তভাবে বৈধ, সর্ব অবস্থাতেই বৈধ। তার মানে, III যে কেবল সব অশূন্য প্রসঙ্গ-বিশ্বে* বৈধ তা নয়, শূন্য প্রসঙ্গ বিশ্বেও বৈধ।

প্রসঙ্গ বিশ্ব ও বৈধতা নিয়ে এত কথা বললাম কেন তা নিশ্চয়ই বুঝতে পেরেছ। বললাম, বিধেয় বাক্য বা যুক্তির বৈধতার একটা বৈশিষ্ট্যের দিকে তোমাদের দৃষ্টি আকর্ষণ করার জন্য।

বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানে এ রকম কথা বলা হয় :

$$p \vee \sim p$$
$$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$$

—এসব বাক্য বৈধ। ওখানে কোনো প্রসঙ্গ বিশ্বের কথা ওঠে না ; ওখানে আমরা নিঃশর্ত-ভাবে বলি—অমুক বাক্য বৈধ। কিন্তু দেখা গেল, বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানে যখন বৈধতার কথা

---

* সে বিশ্বে যদি কেবল একটি, একাধিক বা অসংখ্য সভ্য থাকে তাহলেও

বলা হয় তখন নিঃশর্তভাবে বৈধতার দাবী করা হয় না। ধর, বলা হল—অমুক বাক্যটি বৈধ। এখানে স্পষ্ট করে না বললেও এ রকম কথা ধরে নেওয়া হয়: এ বাক্যটি বৈধ, অমুক প্রসঙ্গ বিশ্বে; এ বাক্যটি বৈধ অমুক পূর্বস্বীকৃতি অনুসারে। বিধের বাক্যের বা যুক্তির বেলায় কেবল বৈধ কথাটি ব্যবহার করলেই চলে না। স্পষ্ট করে বলার দরকার: অমুক প্রসঙ্গ বিশ্বে বৈধ বা অমুক পূর্বস্বীকৃতি মেনে নিলে তবে বৈধ। এজন্য যুক্তিবিজ্ঞানীরা দু রকম বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞানের কথা বলেন: অশূন্য-বিশ্ব-মানা যুক্তিবিজ্ঞান*, আর শূন্য-বিশ্ব-মানা যুক্তিবিজ্ঞান†, আর বলেন—দু রকম বিধেয় বৈধতা বা মানক বৈধতার কথা:

১. অশূন্য-বিশ্ব-মানা যুক্তিবিজ্ঞানে** বৈধতা††
২. শূন্য-বিশ্ব-মানা যুক্তিবিজ্ঞানে** বৈধতা‡

উদাহরণ

II আর III-এতে আছে প্রথম প্রকারের বৈধতা; এগুলি অশূন্য-বিশ্বমানা-যুক্তি-বিজ্ঞানে বৈধ।

III-এতে আছে দ্বিতীয় প্রকারের বৈধতা। লক্ষণীয় II-এতে এ বৈধতা নেই।

দ্বিতীয় প্রকারের বৈধতা সম্পর্কে একটা কথা বলার আছে। কোনো বাক্যে এ প্রকার বৈধতা থাকতে হলে: বাক্যটিকে কেবল শূন্য প্রসঙ্গ-বিশ্বে বৈধ হলে চলবে না, অশূন্য-বিশ্ব-মানা যুক্তিবিজ্ঞানের নিয়ম অনুসারেও বৈধ হতে হবে। উদাহরণ হিসাবে আবার I নাও। $\exists F \supset UF$—এ বাক্য যে কোনো শূন্য প্রসঙ্গ বিশ্বে বৈধ হবে, কেননা সে ক্ষেত্রে এর পূর্বকল্পটি হবে মিথ্যা (আর যে প্রাকল্পিকের পূর্বকল্প মিথ্যা সে প্রাকল্পিক সত্য)। কিন্তু $\exists F \supset UF$ সব অশূন্য বিশ্বে বৈধ নয়।

পুনরুক্তি করে বলি

কোনো বাক্যে প্রথম প্রকারের বৈধতা থাকতে পারে যদি এবং কেবল যদি: বাক্যটি, শূন্য প্রসঙ্গ-বিশ্বে বৈধ হোক কি না হোক, সব অশূন্য প্রসঙ্গ-বিশ্বে বৈধ হয়। উদাহরণ II আর III।

কোনো বাক্যে দ্বিতীয় প্রকারের বৈধতা থাকতে পারে যদি এবং কেবল যদি: বাক্যটি সব অশূন্য প্রসঙ্গ বিশ্বে বৈধ হয় এবং উপরন্তু শূন্য প্রসঙ্গ বিশ্বেও বৈধ হয়। উদাহরণ III।

একটা কথা বলে শেষ করি। যে যুক্তিবিজ্ঞানের কথা মাথায় রেখে আমরা বিধের

---

* logic of non-empty universe

† logic of empty universe

** "বিজ্ঞানে"-এর বদলে "বিজ্ঞান অনুসারে"ও লিখতে পার।

†† valid in the logic of a non-empty universe

‡ valid in the logic of an empty universe

বাক্যের বা যুক্তির বৈধতা নির্ণয় পদ্ধতির কথা বলে আসছি তা হল : অশূন্য-বিশ্ব-মান্য যুক্তিবিজ্ঞান।*

অনুশীলনী

১. প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি প্রয়োগ করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা বিচার কর।

(1) $Ux(Cx \supset Ax), Ux(Bx \supset Cx) \therefore Ux(Bx \supset Ax)$

(2) $Ux(Cx \supset Ax), \exists x(Bx \cdot \sim Cx) \therefore \exists x(Bx \cdot \sim Ax)$

(3) $Ux(Cx \supset \sim Ax), \exists x(Bx \cdot Cx) \therefore \exists x(Bx \cdot \sim Ax)$

(4) $\exists x(Ax \cdot Cx), Ux(Bx \supset Cx) \therefore \exists x(Bx \cdot Ax)$

(5) $Ux(Ax \supset Cx), \exists x(Bx \cdot \sim Cx) \therefore \exists x(Bx \cdot \sim Ax)$

(6) $\exists x(Cx \cdot \sim Ax), Ux(Cx \supset Bx) \therefore \exists x(Bx \cdot Ax)$

(7) $\exists x(Cx \cdot Ax), Ux(Cx \supset Bx) \therefore \exists x(Bx \cdot \sim Ax)$

(8) $Ux(Ax \supset Cx), Ux(Cx \supset Bx) \therefore \exists x(Bx \cdot Ax)$

(9) $Ux(Ax \supset Cx), Ux(Cx \supset \sim Bx) \therefore Ux(Bx \supset \sim Ax)$

(10) $Ux(Px \supset Lx), Ux[(Px \cdot Lx) \supset Sx] \therefore Ux[Px \supset (Lx \cdot Sx)]$

২. সত্যসারণী গঠন করে নিম্নোক্ত যুক্তিগুলির বৈধতা বিচার কর।

(1) $Ux(Mx \supset Bx), Ux(Ax \supset \sim Mx) \therefore Ux(Ax \supset \sim Bx)$

(2) $Ux(Mx \supset \sim Bx), \exists x(Ax \cdot Mx) \therefore \exists x(Ax \cdot \sim Bx)$

(3) $\exists x(Bx \cdot \sim Mx), Ux(Ax \supset Mx) \therefore \exists x(Ax \cdot \sim Bx)$

(4) $Ux(Mx \supset Bx), \exists x(Mx \cdot Ax) \therefore \exists x(Ax \cdot Bx)$

(5) $\exists x(Bx \cdot \sim Mx), Ux(Mx \supset Ax) \therefore \exists x(Ax \cdot \sim Bx)$

---

* সর্বশেষ বিভাগটি লিখতে সাহায্য নিয়েছি Hughes & Londey-কৃত The Elements of Formal Logic-এর। এর অধ্যায় ২৬ দ্রষ্টব্য।

১৪

সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি

১. সৎ-মানকিত বৈকল্পিক বাক্য

লক্ষ করে থাকবে, আমরা যে দুটি নির্ণয় পদ্ধতি ব্যাখ্যা করেছি তা—সত্ত্ব প্রাকল্পিক ও প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি—পূর্ণাঙ্গ নির্ণয় পদ্ধতি নয়। আসলে এগুলি বাক্য-রূপান্তর পদ্ধতি। তবে এসব পদ্ধতির সাহায্যে বিধেয় বাক্যে, বা বিধেয় বাক্য দিয়ে গঠিত যৌগিক বাক্যে, একটা সুবিধাজনক রূপ দেওয়া যায়। সুবিধাজনক বলছি বৈধতা নির্ণয়ের দিক থেকে, আর বলছি এজন্য: বাক্য যুক্তিবিজ্ঞান-অনুমোদিত নির্ণয় পদ্ধতি দিয়ে এ নতুন রূপের বাক্যের বৈধতা নির্ণয় করা যায় অতি সহজে। যেমন, সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতির সাহায্য নিয়ে কোনো বাক্য ব-কে বিশেষ আকারে—একটা প্রথিত ও ঈপ্সিত আকারে রূপান্তরিত করে পাই ভ। এবং ব-এর নতুন রূপের, মানে সমার্থক ভ-এর, বৈধতা পরীক্ষা করি Fell Swoop, আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ ইত্যাদি বাক্যযুক্তিবিজ্ঞান-অনুমোদিত পদ্ধতি দিয়ে। প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি সম্পর্কেও অনুরূপ কথা খাটে। আমরা এখন যে পদ্ধতি ব্যাখ্যা করতে যাচ্ছি তাও, সত্ত্ব প্রাকল্পিক ও প্রকোষ্ঠ পদ্ধতির মত, রূপান্তর পদ্ধতি। এবং বৈধতা নির্ণয়ের কাজে তা প্রয়োগ করতে গেলে শেষ পর্যন্ত বাক্যযুক্তিবিজ্ঞানের নির্ণয় পদ্ধতির সাহায্য নিতে হবে।

এখন যে তৃতীয় পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা করতে যাচ্ছি তার নাম সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি। এ পদ্ধতি যে রূপান্তর অনুমোদন করে সে বাক্যরূপটি কেমন দেখ।

(১) এরূপ বাক্য হবে: বিধেয় বাক্য দিয়ে গঠিত বৈকল্পিক বাক্য, বা এরূপ বৈকল্পিক দিয়ে গঠিত সংযৌগিক বাক্য;

উদাহরণ

$$\exists H\bar{G} \vee U(F \supset \bar{H})$$

$$[U(\bar{F} \vee \bar{G}) \vee \exists F(G \vee H)] \cdot [U(\bar{F} \vee \bar{H}) \vee \exists F(G \vee H)]$$

(২) এরূপ বাক্যে মানকগুলি হবে সৎ, সদর্থক বা ভাববাচক, মানে—
কোনো মানকের অব্যবহিত বামধারে '~' থাকবে না; এবং

(৩) এরূপ কোনো বৈকল্পিক বাক্যে একাধিক বিকল্প বুলীয়-সত্ত্ব-বাক্য হবে না।

যথা

$$U(F \supset G) \vee U(G \supset F)$$
$$\exists(H\bar{G} \vee GF) \vee U(F \supset \bar{H})$$

অনুমোদিত বাক্যাকারের দৃষ্টান্ত ; কিন্তু

$$\exists H\bar{G} \vee \exists GF \vee U(F \supset \bar{H})$$

অনুমোদিত আকারের বাক্য নয়। কেননা এতে দুটি বিকল্প ∃—আকারের বাক্য (বুলীয় সত্ত্ব বাক্য)।

২. সৎ-মানকিত বৈকল্পিকে রূপান্তর

আমরা যে আকারের বাক্যের কথা বলছি তাকে সৎ-মানকিত বৈকল্পিক বাক্য বলে চিহ্নিত করতে পারি। এ অধ্যায়ে ঈপ্সিত বা অনুমোদিত বাক্যরূপ বলতে উক্তরূপ বাক্যাকার বা বাক্যরূপই বুঝব। এখন ধর, কোনো বাক্যে এ বাক্যরূপ দিতে চাও। তাহলে এ বিধানগুলি মেনে চলবে :

(ক) বাক্যযুক্তিবিজ্ঞানের বিভিন্ন রূপান্তর সূত্র প্রয়োগ করে বাক্যটিকে বৈকল্পিকে, বা বৈকল্পিক দিয়ে গঠিত সংযোগিকে, রূপান্তরিত করবে ;

(খ) QE প্রয়োগ করে মানকের বাম ধারের ~ বর্জন করবে, মানে ~U-কে ∃~-এতে, ~∃-কে U~-এতে রূপান্তরিত করবে ; আর

(গ) কোনো পর্যায়ে যদি বুলীয় সত্ত্ব বাক্য একাধিক বিকল্প হিসাবে দেখা দেয় তাহলে প্রথমে (Assoc.), Com. প্রয়োগ করে ∃ক, ∃খ, আকারের বাক্যগুলিকে পাশাপাশি আনবে, তারপর LED সূত্রটি প্রয়োগ করবে।

উদাহরণ

$$\exists H\bar{G} \vee U(F \supset \bar{H}) \vee \exists GF$$

—এ বাক্যে Com., Assoc প্রয়োগ করে পাই

$$(\exists GF \vee \exists H\bar{G}) \vee U(F \supset \bar{H})$$

আর এতে LED প্রয়োগ করে পাই

$$\exists(GF \vee H\bar{G}) \vee U(F \supset \bar{H})$$

এ বাক্যের বিকল্পগুলির মধ্যে কেবল একটি হল বুলীয় সত্ত্ব বাক্য।

যে রূপান্তরের কথা বলা হচ্ছে তার দু একটা বৈশিষ্ট্য লক্ষ কর।

এর একটা বৈশিষ্ট্য হল এই : মানকিত (অঙ্গ)বাক্যকে কোনো বিশেষ আকারে —যেমন, বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের আকারে, প্রকোষ্ঠ-সাত্তিক-বাক্য দিয়ে গঠিত বৈকল্পিকের আকারে, রূপান্তরিত করার দরকার হয় না। যথা, এমন হতে পারে যে—একটি বিকল্প $\exists(F \supset G)$, আর একটি $U(F \equiv H)$, আবার অন্যটি $U(G \vee H)$.। এটা এ পদ্ধতির একটা মস্ত বড় সুবিধা।

আর একটা বৈশিষ্ট্য হল এর সৎ মানক। প্রস্তাবিত রূপান্তরে মানকগুলি হবে সৎ বা ভাববাচক। এজন্যই এ পদ্ধতির নামকরণ করেছি সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি।*

* সৎ মানক—যে মানকের বামে '~' নেই। 'সৎ' আর 'সত্ত্ব'-এর পার্থক্য লক্ষ কর। সৎ—ভাববাচক, সত্ত্ব—existential—সাত্তিক, যেমন : সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি—the method of existential conditional

সত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি ব্যাখ্যার সঙ্গে সঙ্গে সং বৈকল্পিক পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা করা যেত। কেননা, যে পর্বে ঐ পদ্ধতি প্রয়োগ করে সত্ত্ব প্রাকল্পিক বাক্যে পৌঁছান হয় তার পূর্ববর্তী পর্বে, বা পর্ব থেকে, পেতে পারি সং-মানকিত বৈকল্পিক বাক্য—যে আকারের বাক্যের কথা এ অধ্যায়ে বলা হচ্ছে।

উদাহরণ

$$(\exists FG \vee \exists FH) \supset \exists F(G \vee H) \qquad (1)$$

থেকে পরপর পাই

$$\sim(\exists FG \vee \exists FH) \vee \exists F(G \vee H) \qquad (2)$$

$$(\sim\exists FG \cdot \sim\exists FH) \vee \exists F(G \vee H) \qquad (3)$$

$$[\sim\exists FG \vee \exists F(G \vee H)] \cdot [\sim\exists FH \vee \exists F(G \vee H)] \qquad (4)$$

(4)-এর সংযোগী দুটিকে সত্ত্ব প্রাকল্পিক বাক্যে রূপান্তরিত করলে পেতাম

$$[\exists FG \supset \exists F(G \vee H)] \cdot [\exists FH \supset \exists F(G \vee H)]$$

এবং পেতাম সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগের ফলে। (4) থেকে নিম্নোক্ত সং-মানকিত বৈকল্পিক বাক্যটিও পাওয়া যেত

$$[\mathrm{U}\sim(FG) \vee \exists F(G \vee H)] \cdot [\mathrm{U}\sim(FH) \vee \exists F(G \vee H)]$$

এবং বলতে পারি, এটা পাওয়া যেত সং বৈকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ করে। কিন্তু সং বৈকল্পিক পদ্ধতির বৈশিষ্ট্যের কথা ভেবে পদ্ধতিটি স্বতন্ত্রভাবে ব্যাখ্যা করা হল।

আমরা জানি, সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হলে সব বিধেয় (অঙ্গ) বাক্য বুলীয় সত্ত্ব বাক্যে রূপান্তরিত করা দরকার। কিন্তু Uক আকারের বাক্যও সং-মানকিত বৈকল্পিক বাক্যের বিকল্প হিসাবে অঙ্গীভূত হতে পারে।

৩. পাঁচ প্রকার মানকিত বৈকল্পিক ও অববৈকল্পিক

এ অধ্যায়ে আমরা সং-মানকিত বৈকল্পিক বাক্যের কথা বলছি। এ প্রসঙ্গে মনে রাখতে হবে—বৈকল্পিক বাক্য বলতে এখানে কেবল পূর্ণাঙ্গ বা নিখুঁত বৈকল্পিক বুঝছি না, অববৈকল্পিকও বুঝছি। এ ব্যাপক অর্থে

∃ক আকারের বাক্যও সং-মানকিত বৈকল্পিক বাক্য

[এখানে ∃ক হল অববৈকল্পিক। মনে কর, পূর্ণাঙ্গ বাক্যটি ছিল ∃ক v ∃ক আকারের বাক্য।]

Uক আকারের বাক্যও সং-মানকিত বৈকল্পিক বাক্য।

[এখানে, Uক হল অববৈকল্পিক। মনে কর, মূল পূর্ণাঙ্গ বাক্যটি ছিল Uক v Uক আকারের বাক্য।]

তাহলে, আলোচ্য পদ্ধতি প্রয়োগ করতে গিয়ে আমরা পাঁচ প্রকার বাক্যের সাক্ষাৎ পেতে পারি :

(১) ∃ক আকারের বাক্য

(২) Uক আকারের বাক্য

(৩) Uক v Uখ v ⋯ v U-

[যে বাক্যে বিকল্প হিসাবে থাকে দুই বা ততোধিক সার্বিক মানকিত বাক্য]

(৪) ∃ক v Uখ v U- v ⋯ v U-

[যে বাক্যে বিকল্প হিসাবে থাকে কেবল একটি সাত্তিক মানকিত বাক্য, আর এক বা একাধিক সার্বিক মানকিত বাক্য]

(৫) উক্ত যেকোনো রকমের বাক্য দিয়ে গঠিত সংযৌগিক বাক্য।

৪. সৎ-মানকিত বৈকল্পিক ও বৈধতা-নিয়ম

উপরোক্ত প্রত্যেক প্রকারের বাক্য সম্পর্কে একটা করে বৈধতা-নিয়ম উল্লেখ করা হবে। তার আগে আবার সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতিতে ফিরে যাই। ওখানে যে বৈধতা-নিয়মগুলি উল্লেখ করা হয়েছে তার প্রথমটি নেওয়া যাক।

কোনো বুলীয় সত্ত্ব বাক্য বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে এর অন্তর্গত বুলীয় পদ বৈধ।

ঐ প্রসঙ্গে আমরা বলেছি, পদের বৈধতা অবৈধতার কথাও বলা যায়। কেননা বিধেয় অক্ষর F, G, H ইত্যাদিকে বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের p, q ইত্যাদি বলে গণ্য করা যায় (অধ্যায় ১১, বিভাগ ৩ ও ৪ দ্রষ্টব্য)। এখন আমরা আর পদের কথা না বলে, পদের অনুষঙ্গী বাক্যের, পদের প্রতিরূপ অভিন্নগঠন বাক্যের, কথা বলব।

আমরা ∃ক, Uক দিয়ে যথাক্রমে সাত্তিক ও সার্বিক মানকিত বাক্যের আকার দেখিয়ে আসছি। বলা বাহুল্য, ক হল মানকের পরবর্তী অংশ—যা বিধেয় অক্ষর দিয়ে গঠিত। আমরা

ক পদের প্রতিরূপ বাক্যও বোঝাব ক দিয়ে।

প্রসঙ্গ থেকে বোঝা যাবে ক বাক্য বোঝাচ্ছে, নাকি পদ বোঝাচ্ছে।

উদাহরণ

∃ক বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে ক বৈধ

এ বৈধতা-নিয়মে প্রথম ক বসেছে বুলীয় পদের পরিবর্তে আর দ্বিতীয় ক বোঝাচ্ছে ক-পদের প্রতিরূপ অভিন্নগঠন বাক্য। যা বলা হল তার মানে—বিধেয় অক্ষর F, G ইত্যাদি দিয়ে বাক্যও বোঝানো হবে। তাহলে $\exists F\bar{G}$, $U(F \supset G)$, $\exists(F \vee G)$-এর

$$F\bar{G},\ F \supset G,\ F \vee G$$

এ বিধেয়-বিন্যাসগুলির প্রতিরূপ বাক্য—অভিন্নগঠন বাক্য—হল এ সত্যাপেক্ষ বাক্যগুলি

$$F \cdot \sim G \text{ বা } F\bar{G},\ F \supset G,\ F \vee G$$

যেহেতু আমাদের প্রস্তাবিত সৎ মানকিত বৈকল্পিক বাক্যে Uক Uখ আকারের বাক্যও থাকে, এবং যেহেতু Uক Uখ-এর ক, খ বুলীয় পদ নয়, সেহেতু বৈধতা প্রসঙ্গে আমরা

আর বুলীয় পদের কথা না তুলে অভিন্নগঠন বাক্যের কথা বলব। যেমন, উক্ত বৈধতা-নিয়মটি এভাবে ব্যক্ত করব।

ꓱক বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে ক বৈধ।

যে পাঁচ রকমের সৎ মানকিত বৈকল্পিক বাক্যের কথা বলা হয়েছে এবার সেগুলির প্রত্যেকটি সম্পর্কে একটা বৈধতা-নিয়ম উল্লেখ করা যাক। নিয়মগুলি QA* দিয়ে চিহ্নিত হল।

QA1 ꓱক বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে ক বৈধ।

QA2 Uক বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে ক বৈধ।

QA3 Uক v Uখ v বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে এর বিকল্পগুলির কোনোটি বৈধ, মানে ক, খ ··· এদের কোনোটি বৈধ।

QA4 ꓱক v Uখ v Uগ v ··· বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে : সাত্তিক বিকল্পটির সঙ্গে এক একটি সার্বিক বিকল্প নিয়ে যতগুলি বৈকল্পিক বাক্য গঠিত হতে পারে তার কোনো একটি বৈধ।

যথা

ꓱক v Uখ v Uগ v Uঘ

বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে

ꓱক v Uখ, ꓱক v Uগ, ꓱক v Uঘ

এ বৈকল্পিকগুলির কোনোটি বৈধ ; মানে যদি এমন হয় যে :

ক v খ, ক v গ, ক v ঘ

এ বাক্যগুলির কোনোটি বৈধ।

QA5 যেকোনো প্রকারের বাক্য দিয়ে গঠিত সংযৌগিক বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে : প্রত্যেকটি সংযোগী বৈধ।

৫. সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতির প্রয়োগ

এবার সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতির প্রয়োগ দেখানোর কথা। এ পদ্ধতিটি ব্যাখ্যা করতে গিয়ে আমরা যে সব বৈধতা-নিয়ম উল্লেখ করেছি তার মধ্যে 4 সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ ও জটিল। নিচে নানান উদাহরণ নিয়ে আমরা প্রধানত 4-এর প্রয়োগই দেখালাম।

প্রথম সংস্থানে EIO

$$U(G \supset \sim H) \cdot \exists FG \; \therefore \; \exists F\bar{H}$$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকটি নিয়ে এভাবে ঈপ্সিত আকারে পৌঁছাতে পারি

$$[U(G \supset \sim H) \cdot \exists FG] \supset \exists F\bar{H}$$

$$\sim[\qquad\qquad\qquad\qquad] \vee \exists F\bar{H}$$

* QA হল Quantificational Alternation-এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

$$\sim U(G \supset \sim H) \vee \sim \exists FG \vee \exists F\bar{H}$$
$$\exists \sim (G \supset \sim H) \vee \sim \exists FG \vee \exists F\bar{H}$$
$$\exists GH \vee \sim \exists FG \vee \exists F\bar{H}$$
$$(\exists F\bar{H} \vee \exists GH) \vee \sim \exists FG \qquad \text{[Com., Assoc.]}$$

আমরা যে আকারে প্রাকল্পিকটিকে রূপান্তরিত করতে চেয়েছি সে আকারে (সৎ-মানকিত বৈকল্পিকের আকারে) অসৎ (অভাববাচক) মানক থাকতে পারবে না। এখন অসৎ $\sim \exists FG$-এতে QE প্রয়োগ করে পাই $U \sim (FG)$ বা $U(\bar{F} \vee \bar{G})$। কাজেই শেষোক্ত বাক্যটি এভাবে লিখতে পারি :

$$(\exists F\bar{H} \vee \exists GH) \vee U(\bar{F} \vee \bar{G})$$

এতে LED প্রয়োগ করে পাই

$$\exists(F\bar{H} \vee GH) \vee U(\bar{F} \vee \bar{G})$$

এটা ∃ক v Uখ আকারের বাক্য। QA4 অনুসারে এ বাক্য বৈধ হবে যদি ক v খ বাক্যটি, মানে

$$F\bar{H} \vee GH \vee \bar{F} \vee \bar{G}$$

বৈধ হয়। আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ করে এর বৈধতা পরীক্ষা করা হল।

$$F\bar{H} \vee GH \vee \bar{F} \vee \bar{G}$$
$$1\bar{H} \vee GH \vee 0 \vee \bar{G} \qquad 0\bar{H} \vee GH \vee 1 \vee \bar{G}$$
$$\bar{H} \vee GH \vee \bar{G} \qquad 1$$
$$\bar{H} \vee 1H \vee 0 \quad \bar{H} \vee 0H \vee 1$$
$$\bar{H} \vee H \qquad 1$$
$$1$$

দ্বিতীয় সংস্থানে EAE

$$U(H \supset \sim G), U(F \supset G) \quad \therefore U(F \supset \sim H)$$
$$[U(H \supset \sim G) \cdot U(F \supset G)] \supset U(F \supset \sim H)$$
$$\sim[\qquad\qquad\qquad] \vee$$
$$\sim U(H \supset \sim G) \vee \sim U(F \supset G) \vee U(F \supset \sim H)$$
$$\exists HG \vee \exists F\bar{G} \vee U(F \supset \sim H)$$
$$(\exists HG \vee \exists F\bar{G}) \vee U(\bar{F} \vee \bar{H})$$
$$\exists(HG \vee F\bar{G}) \vee U(\bar{F} \vee \bar{H})$$
$$HG \vee F\bar{G} \vee \bar{F} \vee \bar{H}$$
$$1G \vee F\bar{G} \vee \bar{F} \vee 0 \qquad 0G \vee F\bar{G} \vee \bar{F} \vee 1$$
$$G \vee F\bar{G} \vee \bar{F} \qquad 1$$
$$1 \vee F0 \vee \bar{F} \quad 0 \vee F1 \vee \bar{F}$$
$$1 \qquad F \vee \bar{F}$$
$$1$$

তৃতীয় সংস্থানে AII

$$U(G \supset H), \exists GF \quad \therefore \exists FH$$
$$[U(G \supset H) \cdot \exists GF] \supset \exists FH$$
$$\sim U(G \supset H) \vee \sim \exists GF \vee \exists FH$$
$$\exists G\bar{H} \vee \sim \exists GF \vee \exists FH$$
$$\exists FH \vee \exists G\bar{H} \vee \sim \exists GF$$
$$\exists FH \vee \exists G\bar{H} \vee U(\bar{G} \vee \bar{F}) \qquad [QE]$$
$$(\exists FH \vee \exists G\bar{H}) \vee U(\bar{G} \vee \bar{F})$$
$$\exists(FH \vee G\bar{H}) \vee U(\bar{G} \vee \bar{F})$$

আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ করলে দেখা যাবে

$$FH \vee G\bar{H} \vee \bar{G} \vee \bar{F}$$

বৈধ। সুতরাং তৃতীয় সংস্থানে AII বৈধ।

এবার উদাহরণ হিসাবে এ বাক্যটি নাও।

$$(\sim \exists WH\bar{E} \cdot \sim \exists W\bar{E}\bar{H}) \supset \exists W\bar{E} \text{*}$$
$$\sim(\qquad\qquad) \vee \dots\dots$$
$$(\exists WH\bar{E} \vee \exists W\bar{E}\bar{H}) \vee \sim \exists W\bar{E}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \vee U(\bar{W} \vee E)$$
$$\exists(WH\bar{E} \vee W\bar{E}\bar{H}) \vee U(\bar{W} \vee E)$$
$$WH\bar{E} \vee W\bar{E}\bar{H} \vee \bar{W} \vee E$$

$$1H\bar{E} \vee 1\bar{E}\bar{H} \vee 0 \vee E \qquad 0H\bar{E} \vee 0\bar{E}\bar{H} \vee 1 \vee E$$
$$H\bar{E} \vee \bar{E}\bar{H} \vee E \qquad 1$$

$$1\bar{E} \vee \bar{E}0 \vee E \qquad 0\bar{E} \vee \bar{E}1 \vee E$$
$$\bar{E} \vee 0 \vee E \qquad 0 \vee \bar{E} \vee E$$
$$\bar{E} \vee E \qquad \bar{E} \vee E$$
$$1 \qquad 1$$

এবার নিম্নোক্ত যুক্তিটি নাও।

All logicians are philosophers,
Not quite all mathematicians are philosophers ;
∴ Some mathematicians are not logicians.

এ যুক্তির দ্বিতীয় হেতুবাক্যটি একটি উনসার্বিক (exceptive) বাক্য। আসলে এরূপ বাক্য হল সংযৌগিক। যেমন, উক্ত বাক্যের বক্তব্য

Some mathematicians *are* philosophers, and
some mathematicians *are not* philosophers

---

* পৃঃ ১৭৮-এতে উল্লিখিত যুক্তিটি দেখ। এটা হল তার অনুবর্তী প্রাকল্পিক বাক্য।

তাহলে দ্বিতীয় হেতুবাক্যের জায়গায় এ বাক্য বসিয়ে যুক্তিটিকে এভাবে সংক্ষেপে লেখা

All *L* are *P*,
Some *M* are *P* and
some *M* are not *P*,
∴ Some *M* are not *L*.

সংকেতলিপিতে

$$U(L \supset P), \exists MP, \exists M\bar{P} \quad \therefore \quad \exists M\bar{L}$$

$$[U(L \supset P) \cdot \exists MP \cdot \exists M\bar{P}] \supset \exists M\bar{L}$$

$$\sim[\qquad\qquad\qquad\qquad]\vee$$

$$\exists L\bar{P} \vee \sim\exists MP \vee \sim\exists M\bar{P} \vee \exists M\bar{L}$$

$$\exists M\bar{L} \vee \exists L\bar{P} \vee \sim\exists MP \vee \sim\exists M\bar{P}$$

$$\underset{\text{I}}{\exists(M\bar{L} \vee L\bar{P})} \vee \underset{\text{II}}{U(\bar{M} \vee \bar{P})} \vee \underset{\text{III}}{U(\bar{M} \vee P)}$$

আমাদের দেখতে হবে I v II, আর I v III এ দুটোর মধ্যে অন্তত একটি বৈধ কিনা।
প্রথমে নেওয়া যাক I v II, বা

$$\exists(M\bar{L} \vee L\bar{P}) \vee U(\bar{M} \vee \bar{P})$$

এ বাক্য বৈধ হবে যদি নিম্নোক্ত বাক্যটি বৈধ হয়

$$M\bar{L} \vee L\bar{P} \vee \bar{M} \vee \bar{P}$$

আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ করলে দেখা যাবে, বাক্যটি অবৈধ। তারপর নেওয়া যাক I v III, বা

$$\exists(M\bar{L} \vee L\bar{P}) \vee U(\bar{M} \vee P)$$

এ বাক্য বৈধ হতে পারে যদি

$$M\bar{L} \vee L\bar{P} \vee \bar{M} \vee P$$

এ বাক্যটি বৈধ হয়। দেখ, বাক্যটি বৈধ কিনা।

$$M\bar{L} \vee L\bar{P} \vee \bar{M} \vee P$$

$$1\bar{L} \vee L\bar{P} \vee 0 \vee P \qquad 0\bar{L} \vee L\bar{P} \vee 1 \vee P$$

$$\bar{L} \vee L\bar{P} \vee P \qquad\qquad 1$$

$$0 \vee 1\bar{P} \vee P \qquad 1 \vee 0\bar{P} \vee P$$

$$\bar{P} \vee P \qquad\qquad 1$$

$$1$$

I v III বৈধ, সুতরাং প্রাকল্পিকটি বৈধ ; সুতরাং অনুষঙ্গী যুক্তিটি বৈধ।

এবার উদাহরণ হিসাবে লুইস্ কেরল্ থেকে নিম্নোক্ত সোরাইটিস্টি নেওয়া যাক।

Babies are illogical,
Nobody is despised who can manage a crocodile,
Illogical persons are despised ;
∴ Babies cannot manage crocodiles.

সংকেতলিপিতে

$$U(B \supset I),\ U(C \supset \sim D),\ U(I \supset D) \ \therefore\ U(B \supset \sim C)$$
$$[U(B \supset I) \cdot U(C \supset \sim D) \cdot U(I \supset D)] \supset U(B \supset \sim C)$$
$$\sim [\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad] \vee$$
$$\exists B\bar{I} \vee \exists CD \vee \exists I\bar{D} \vee U(\bar{B} \vee \bar{C})$$
$$\exists(B\bar{I} \vee CD \vee I\bar{D}) \vee U(\bar{B} \vee \bar{C})$$
$$B\bar{I} \vee CD \vee I\bar{D} \vee \bar{B} \vee \bar{C}$$
$$1\bar{I} \vee CD \vee I\bar{D} \vee 0 \vee \bar{C} \qquad 0\bar{I} \vee CD \vee I\bar{D} \vee 1 \vee \bar{C}$$
$$\bar{I} \vee CD \vee I\bar{D} \vee \bar{C} \qquad 1$$
$$\bar{I} \vee C1 \vee I0 \vee \bar{C} \qquad \bar{I} \vee C0 \vee I1 \vee \bar{C}$$
$$I \vee C \vee \bar{C} \qquad \bar{I} \vee I \vee \bar{C}$$
$$1 \qquad 1$$

এবার একটা জটিল উদাহরণ। বৈধতা নির্ণয় করতে হবে, ধর, নিম্নোক্ত বাক্যটির :

$$\{U[F \supset (G \vee \sim H)] \cdot [\exists H \equiv \exists(I \cdot \sim F)]\} \supset$$
$$[\sim \exists(G \vee I) \supset \exists(\sim F \cdot \sim H)]$$

এ বাক্যটি একটু সংক্ষেপ করে এভাবে লেখা যায় :

$$\{U[F \supset (G \vee \bar{H})] \cdot (\exists H \equiv \exists I\bar{F})\} \supset [\sim\exists(G \vee I) \supset \exists\bar{F}\bar{H}$$

এ বাক্য থেকে পরপর পাব

$$\{U[F \supset (G \vee \bar{H})] \cdot [(\exists H \cdot \exists I\bar{F}) \vee (\sim\exists H \cdot \sim\exists IF)]\} \supset \cdots\cdots \qquad [Df \equiv]$$
$$\sim\{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\} \vee \cdots\cdots$$
$$\{\sim U[F \supset (G \vee \bar{H})] \vee \sim[\exists H \cdots\cdots \qquad\qquad \} \vee \cdots$$
$$\sim U[F \supset (G \vee \bar{H}] \vee [\sim(\exists H \cdot \exists I\bar{F}) \cdot \sim(\sim\exists H \cdot \sim\exists I\bar{F})]\} \vee \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \vee (\sim\exists H \vee \sim\exists I\bar{F}) \cdot (\exists H \vee \exists I\bar{F})]\} \vee$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \vee$$
$$\exists(G \vee I) \vee \exists\bar{F}\bar{H}$$

$$\exists\sim[F \supset (G \vee \bar{H}) \vee \cdots\cdots$$
$$\exists\sim[F \supset (G \vee \bar{H})] \vee [(U\bar{H} \vee U(\bar{I} \vee F) \cdot (\exists H \vee \exists I\bar{F})] \vee$$
$$1 \qquad\qquad 2 \qquad\qquad 3$$
$$\exists(G \vee I) \vee \exists\bar{F}\bar{H} \qquad [QE]$$
$$4 \qquad 5$$

সংক্ষেপে

$$1 \vee (2 \cdot 3) \vee 4 \vee 5$$

এর থেকে পরপর পাই

$4 \vee 5 \vee 1 \vee (2 \cdot 3)$ [Assoc, Com.]

$(4 \vee 5 \vee 1 \vee 2) \cdot (4 \vee 5 \vee 1 \vee 3)$ [Dist.]

বা

$$\{\exists (G \vee I) \vee \exists \bar{F}\bar{H} \vee \exists \sim [F \supset (G \vee \bar{H})] \vee U\bar{H} \vee U(\bar{I} \vee F)\} \cdot$$
$$\{\exists (G \vee I) \vee \exists \bar{F}\bar{H} \vee \exists \sim [F \supset (G \vee \bar{H})] \vee \exists H \vee \exists I\bar{F}\} \quad [A]$$

এ বাক্যে *LED* প্রয়োগ করে পাই

$$\{\exists \{(G \vee I) \vee \bar{F}\bar{H} \vee \sim [F \supset (G \vee \bar{H})]\} \vee U\bar{H} \vee U(\bar{I} \vee F)\} \cdot$$
$$\exists \{(G \vee I) \vee \bar{F}\bar{H} \vee \sim [F \supset (G \vee \bar{H})] \vee H \vee I\bar{F}\} \quad [B]$$

এ বাক্যে দুটি সংযোগী। বাক্যটি বৈধ হতে পারে যদি দুটি সংযোগীই বৈধ হয়। কাজেই সংযোগী দুটিকে পৃথকভাবে বিচার করতে পারি। প্রথমে প্রথম সংযোগীটি নেওয়া যাক—দেখা যাক, এ বাক্যটি বৈধ কিনা। নিচের সারণীটিতে দেখানো হল—এ বাক্যের আকার এমন : ∃ক v Uখ v Uগ।

∃ক	Uখ	Uগ
$\exists\{G \vee I \vee \bar{F}\bar{H} \vee \sim [F \supset (G \vee \bar{H}))\}$	$U\bar{H}$	$U(\bar{I} \vee F)$

বৈধতা-নিয়ম QA4 অনুসারে ∃ক v Uখ v Uগ বৈধ হবে যদি

∃ক v Uখ

∃ক v Uগ

এ বৈকল্পিক দুটির কোনোটি বৈধ হয়। প্রথম বৈকল্পিকটি বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি ক v খ, অর্থাৎ

$$G \vee I \vee \bar{F}\bar{H} \vee \sim [F \supset (G \vee \bar{H})] \vee \bar{H}$$

বৈধ হয়। দেখা যাবে, এ বৈকল্পিকটি অবৈধ। দেখা যাবে

F	*G*	*H*	*I*
0	0	1	0

এ সত্যমূল্য বিন্যাসে উক্ত বৈকল্পিক মিথ্যা, সুতরাং অবৈধ। দ্বিতীয় বৈকল্পিকটি বৈধ হবে যদি ক v গ বৈধ হয়, অর্থাৎ

$$G \vee I \vee \bar{F}\bar{H} \vee \sim [F \supset (G \vee H) \vee \bar{I} \vee F$$

বৈধ হয়। এ বৈকল্পিকে একটি বিকল্প *I* অন্য একটি $\bar{I}$, সুতরাং বৈকল্পিকটি বৈধ। তাহলে, প্রথম সংযোগীটি বৈধ।

এবার দ্বিতীয় সংযোগীটি নেওয়া যাক। এটি ∃ক আকারের বাক্য (পৃঃ ২০৯-এতে কথিত প্রথম প্রকারের বাক্য)। এবং এ বাক্যটি বৈধ হবে যদি ক বা

$$G \vee I \vee \bar{F}\bar{H} \vee \sim [F \supset (G \vee \bar{H})] \vee H \vee I\bar{F}$$

বৈধ হয়। আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ করে দেখা যাক বাক্যটি বৈধ কিনা।

$G \vee I \vee \bar{F}\bar{H} \vee \sim [F \supset (G \vee \bar{H})] \vee H \vee I\bar{F}$

$G \vee I \vee \bar{F}0 \vee \sim [F \supset (G \vee 0)] \vee 1 \vee I\bar{F}$

1

$G \vee I \vee F\bar{1} \vee \sim [F \supset (G \vee 1)] \vee 0 \vee I\bar{F}$

$G \vee I \vee \bar{F} \vee \sim [F \supset 1] \vee I\bar{F}$

$G \vee I \vee \bar{F} \vee \sim 1 \vee I\bar{F}$

$G \vee I \vee \bar{F} \vee 0 \vee I\bar{F}$

$G \vee I \vee \bar{F} \vee I\bar{F}$

$1 \vee I \vee \bar{F} \vee I\bar{F}$ $\quad$ $0 \vee I \vee \bar{F} \vee I\bar{F}$

1 $\quad$ $I \vee \bar{F} \vee I\bar{F}$

$1 \vee \bar{F} \vee 1\bar{F}$ $\quad$ $0 \vee \bar{F} \vee 0\bar{F}$

1 $\quad$ $\bar{F}$

0 $\quad$ 1

স্পষ্টতই দ্বিতীয় সংযোগীটি অবৈধ। সুতরাং B চিহ্নিত সংযৌগিক বাক্যটি অবৈধ। সুতরাং মূল বাক্যটি অবৈধ।

৬. Q-নিয়ম ও QA-নিয়মের সম্বন্ধ

সত্ত্ব প্রাকল্পিক ও সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতির সাদৃশ্যের কথা আগে বলেছি। এবং সাদৃশ্য সত্ত্বেও কেন পদ্ধতি দুটি স্বতন্ত্রভাবে আলোচনা করা হল তার কৈফিয়ৎও দিয়েছি। এ দুটি পদ্ধতি প্রসঙ্গে দু প্রস্ত বৈধতা-নিয়ম উল্লেখ করা হয়েছে : সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতির নিয়মগুলি Q-চিহ্নিত, আর সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতির নিয়মগুলি QA-চিহ্নিত। এ নিয়মগুলির দিকে আবার নজর দাও। Q-চিহ্নিত নিয়ম আর এদের অনুষঙ্গী QA-চিহ্নিত নিয়মগুলি আপাতদৃষ্টিতে ভিন্ন দেখালেও, দেখা যাবে, এগুলি আসলে অভিন্ন বা সমার্থক বা বা এদের মধ্যে যে ভেদ তা যৌক্তিক ভেদ নয়। নিয়মগুলি তুলনা করলে (Q1—QA1, Q2 – QA2 ইত্যাদি জোড় নিয়ে) এবং এক 'ভাষা' থেকে অন্য 'ভাষা'র 'অনুবাদ' করলে এ উক্তির যাথার্থ্য বোঝা যাবে। তুলনার জন্য কতকগুলি নিয়ম (Q নিয়ম, QA নিয়ম) আমরা পুনরুক্তি করব। আর পুনরুক্তি করতে গিয়ে কিছু সংক্ষেপকরণও করা হবে : ব্যবহার করা হবে $\leftrightarrow$ এ সংক্ষেপক প্রতীকটি।

$\leftrightarrow$-এর জায়গায় পড়বে :

হবে, যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে

যথা

$\exists(H \vee \bar{H})$ বৈধ হবে, যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে $H \vee \bar{H}$ বৈধ

এ বাক্যটি সংক্ষেপে লিখব এভাবে

$\exists(H \vee \bar{H})$ বৈধ $\leftrightarrow$ $H \vee \bar{H}$ বৈধ

Q5 আর QA5 তুলনা করার কথাই ওঠে না ; স্পষ্টতই এগুলি অভিন্ন। তাহলে বাকি থাকল চারটি জোড়। Q1 – QA1 থেকে সুরু করে জোড়গুলি পর পর নেওয়া যাক।

[Q1] বুলীয় সত্ত্ব বাক্য বৈধ ↔ এর অন্তর্গত বুলীয় পদ বৈধ

যে সাংকেতিক ভাষায় আমরা কথা বলে আসছি সে ভাষায় এ নিয়মটি এভাবে ব্যক্ত করতে পারি :

[QA1] Bক বৈধ ↔ ক বৈধ

এটাই ছিল QA1। দেখা গেল, Q1 আর QA1-এর বক্তব্য অভিন্ন ; ভাষাগত পার্থক্য ছাড়া এদের মধ্যে আর কোনো পার্থক্য নেই। এবার Q2।

[Q2] বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের নিষেধ বৈধ ↔ এর অন্তর্গত বুলীয় পদ স্ববিরোধী

এ নিয়মটি সাংকেতিক ভাষায় এভাবে ব্যক্ত করতে পারি :

~Bক বৈধ ↔ ক স্ববিরোধী

এখন, ক স্ববিরোধী ↔ ~ক বৈধ

∴ ~Bক বৈধ ↔ ~ক বৈধ

সর্বশেষ বাক্যে ক প্রতীকটির জায়গায় ~ক বসিয়ে পাই :

~B~ক বৈধ ↔ ~~ক বৈধ

বা ~B~ক বৈধ ↔ ~ক বৈধ

এখন ~B~-এর জায়গায় U বসিয়ে পাই :

[QA2] Uক বৈধ ↔ ক বৈধ

এটাই ছিল QA2। দেখা গেল Q2 আর QA2-এর বক্তব্য অভিন্ন। এবার নেওয়া যাক Q3।

[Q3] বুলীয় সত্ত্ব বাক্যের নিষেধ দিয়ে গঠিত বৈকল্পিক বাক্য বৈধ ↔ এ নিষেধগুলির কোনোটি স্ববিরোধী

এ নিয়মটি এভাবে ব্যক্ত করা যায় :

~Bক v ~Bখ v ~Bগ v ......বৈধ ↔ ক স্ববিরোধী, অথবা খ স্ববিরোধী, অথবা গ স্ববিরোধী, অথবা......

ক স্ববিরোধী, অথবা খ স্ববিরোধী, অথবা গ স্ববিরোধী অথবা... ↔ ~ক বৈধ, অথবা ~খ বৈধ, অথবা ~গ বৈধ, অথবা...

∴ ~Bক v ~Bখ v ~Bগ v ...বৈধ ↔ ~ক বৈধ অথবা ~খ বৈধ, অথবা ~গ বৈধ, অথবা...

এখন এ বাক্যে ক প্রতীকটির জায়গায় ~ক বসিয়ে, খ-এর জায়গায় ~ খ, গ-জায়গায় ~গ ইত্যাদি বসিয়ে, পাব

~B~ক v ~B~খ v ~B~গ v ...বৈধ

↔ ~~ক বৈধ, অথবা ~~খ বৈধ, অথবা ~~গ বৈধ অথবা......

বা

~ꓱ~ক v ~ꓱ~খ v ~ꓱ~গ v...বৈধ

↔ ক বৈধ, অথবা খ বৈধ, অথবা গ বৈধ, অথবা...

এ বাক্যে ~ꓱ~এর জায়গায় U বসিয়ে পাব

[QA3] Uক v Uখ v ......বৈধ

↔ ক বৈধ, অথবা খ বৈধ, অথবা গ বৈধ, অথবা...

এটাই QA3। আমরা দেখলাম যে Q3 আর QA3-এর বক্তব্য অভিন্ন। এবার নাও Q4।

Q4 হল সত্ত্ব প্রাকল্পিক সংক্রান্ত নিয়ম। এখন, সত্ত্ব প্রাকল্পিক দু রকম রূপ পরিগ্রহ করতে পারে :

(১) যে সত্ত্ব প্রাকল্পিকের পূর্বকল্প একটি মাত্র বুলীয় সত্ত্ব বাক্য— ꓱক ⊃ ꓱস, ꓱ~ক ⊃ ꓱস, আকারের বাক্য ;

(২) যে সত্ত্ব প্রাকল্পিকের পূর্বকল্প একাধিক বুলীয় সত্ত্ববাক্য দিয়ে গঠিত সংযৌগিক— (ꓱক. ꓱখ...) ⊃ ꓱস আকারের বাক্য।

প্রথম প্রকারের বাক্য সম্পর্কে Q নিয়ম এভাবে ব্যক্ত করতে পারি

[Q5.1] ꓱ~ক ⊃ ꓱস বৈধ ↔ ~ক ⊃ স বৈধ (1)

এখন, ~ক ⊃ স বৈধ ↔ ক v স বৈধ (2)

∴ ꓱ~ক ⊃ ꓱস বৈধ ↔ ক v স বৈধ (3)

(3)-এতে ꓱ~ক ⊃ ꓱস-এর সমার্থক ~ꓱ~ক v ꓱস বসিয়ে পাই

~ꓱ~ক v ꓱস বৈধ ↔ ক v স বৈধ (4)

আর (4)-এর ~ꓱ~এর জায়গায় U বসিয়ে পাই

[QA5.1] Uক v ꓱস বৈধ ↔ ক v স বৈধ

এটা QA5 এর প্রথম অংশ। এবার এর দ্বিতীয় অংশ, আর Q5-এর দ্বিতীয় অংশের সম্বন্ধ দেখাব। তার আগে নিচের অবরোহটি দেখে নাও।

(1) $(p \cdot q) \supset r$
(2) $\sim(p \cdot q) \vee r$
(3) $\sim p \vee \sim q \vee r$
(4) $\sim p \vee \sim q \vee r \vee r$ [Idem., Assoc]
(5) $\sim p \vee r \vee \sim q \vee r$ [Com., Assoc]
(6) $(\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee r)$
(7) $(p \supset r) \vee (q \supset r)$

লক্ষণীয় (7) বৈকল্পিক বাক্য ; সংযৌগিক নয়। মানে (1)-এর সমার্থক $(p \supset r) \cdot (q \supset r)$ নয়। (1)-এর সমার্থক হল : (7) $(p \supset r) \vee (q \supset r)$। (1) বৈধ হত যদি এবং কেবল যদি (7) বৈধ হত, আর (7) বৈধ হত যদি এবং কেবল যদি (7)-এর কোনো বিকল্প বৈধ হত। এ কথাটার যা তাৎপর্য তা এভাবে বলা যায়। p আর q

r-কে প্রতিপাদন করে—এ কথার মানে এই নয় যে p r-কে প্রতিপাদন করে এবং q r-কে প্রতিপাদন করে। এ কথার মানে : p r-কে প্রতিপাদন করে <u>অথবা</u> q r-কে প্রতিপাদন করে। এবার নিচের অবরোহটির দিকে নজর দাও।

(1) (∃∼ক · ∃∼খ) ⊃ ∃স
(2) ∼(∃∼ক · ∃∼খ) v ∃স
(3) ∼∃∼ক v ∼∃∼খ v ∃স
(4) ∼∃∼ক v ∃∼খ v ∃স v ∃স
(5) ∼∃∼ক v ∃স v ∼∃∼খ v ∃স
(6) (∃∼ক ⊃ ∃স) v (∃∼খ ⊃ ∃স) [5 থেকে]
(7) [Uক v ∃স) v (Uখ v ∃স) [5 থেকে]

(1) হল সত্ত্ব প্রাকল্পিক ; এ বাক্যের পূর্বকল্পে আছে দুটি বুলীয় সত্ত্ব বাক্য। (1) আর (6) সমার্থক। সুতরাং (1) বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি (6) বৈধ হয়। আর (6) বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এর কোনো বিকল্প বৈধ হয়। এ কথাটাই বলা হয় Q5-এর দ্বিতীয় অংশে।

[Q5.2] (∃ক. ∃খ)* ⊃ ∃স বৈধ ↔ ∃ক ⊃ ∃স বৈধ অথবা ∃খ ⊃ ∃স বৈধ

এবার (3) আর (7)-এর দিকে নজর দাও। (3)-এর ∼∃∼-এর জায়গায় U বসিয়ে বাক্যটি লিখতে পারি এভাবে

(3′) Uক v Uখ v ∃স

বলা বাহুল্য, এ বাক্য আর

(7) (Uক v ∃স) v (Uখ v ∃স)

সমার্থক। কাজেই (3) বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি (7) বৈধ হয়। আর (7) বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এর অন্তর্গত কোনো বৈকল্পিক বাক্য বৈধ হয়। এ কথাটাই QA5-এর পরবর্তী অংশের বক্তব্য। কথাটা এভাবেও বলতে পারি

[QA5.2] Uক v Uখ v ∃ক বৈধ ↔ Uক v ∃ক বৈধ, অথবা Uখ v ∃ক বৈধ।

Q5 আর QA5-এর শেষাংশ ব্যাখ্যা করতে গিয়ে, জটিলতা এড়াবার জন্য, আমরা নিয়েছি

(১) এমন সত্ত্ব বাক্য যাতে আছে কেবল দুটি সংযোগী : ∃ক, ∃খ
(২) এমন বৈকল্পিক বাক্য যাতে আছে দুটি সার্বিক বিকল্প : Uক, Uখ

বলা বাহুল্য, এমন সত্ত্ব প্রাকল্পিকের সাক্ষাৎ পেতে পারি যার পূর্বকল্পে আছে আরও

* (1)-এতে ক-এর জায়গায় ∼ক, খ-এর জায়গায় ∼খ বসিয়ে ও DN প্রয়োগ করে

বেশী সংখ্যক সংযোগী ; এমন বৈকল্পিকের সাক্ষাৎ পেতে পারি যাতে আছে আরও বেশী সংখ্যক সার্বিক বিকল্প : যথা—

$$(\exists ক \cdot \exists ক \cdot \exists গ) \supset \exists স, \quad Uক \vee Uখ \vee Uগ \vee \exists স$$

(১) ও (২) সম্পর্কে যা বলা হয়েছে সে রকম কথা স্পষ্টতই উক্তরূপ বাক্য সম্পর্কেও খাটবে।

অনুশীলনী

১. অধ্যায় ১২-এর অনুশীলনী (১)-এতে যে যুক্তিগুলি দেওয়া আছে, সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ করে সেগুলির বৈধতা পরীক্ষা কর।

২. অধ্যায় ১৩-এর অনুশীলনী ১ দেখ। এ অনুশীলনীর যুক্তিগুলির বৈধতা পরীক্ষা কর—পরীক্ষা করবে সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ করে।

১৫

মিশ্র বাক্য ও নির্ণয় পদ্ধতি

১. বিধেয় যুক্তি ও ব্যক্তিবাক্য

বিধেয় বাক্য ও বিধেয় যুক্তি প্রসঙ্গে—যে নির্ণয় পদ্ধতিগুলি ব্যাখ্যা করা হয়েছে সেগুলির একটা দুর্বলতা হয়ত লক্ষ করেছ। হয়ত লক্ষ করেছ যে, এসব পদ্ধতি দিয়ে, অনেক জটিল যুক্তি ও বাক্যের বৈধতা নির্ণয় করা গেলেও, নিচেকার ন্যায়গুলির মত অতি সরল বিধেয় যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা করা যায় না।

সব দার্শনিক জ্ঞানী;	সব দার্শনিক জ্ঞানী।
রামবাবু দার্শনিক ;	শ্যামবাবু দার্শনিক নয় ;
∴ রামবাবু জ্ঞানী।	∴ শ্যামবাবু জ্ঞানী নয়।

কেন আলোচিত নির্ণয় পদ্ধতি দিয়ে এ জাতীয় যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা করা যায় না তা নিশ্চয়ই বুঝতে পেরেছ। তবু হেতুটা বলছি : এ রকম ন্যায়ের একটি অবয়ব ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য (বা সংক্ষেপে ব্যক্তিবাক্য) ; কিন্তু ব্যক্তিবাক্য নিয়ে কী করা দরকার সে সম্পর্কে পদ্ধতিগুলি নীরব। বস্তুত নির্ণয় পদ্ধতিগুলি ব্যাখ্যার সময় বা এদের প্রয়োগের উদাহরণ দেওয়ার সময়, আমরা ব্যক্তিবাক্যের কথাটা চেপে গেছি। কিন্তু প্রশ্ন ওঠে :

> যে যুক্তির কোনো অবয়ব ব্যক্তিবাক্য বা যে বাক্যের কোনো অঙ্গ ব্যক্তিবাক্য, সে যুক্তির বা বাক্যের বৈধতা নির্ণয় করার উপায় কী ?

দেখা যাবে, যে নির্ণয় পদ্ধতি ব্যাখ্যা করেছি সেগুলির নিয়মের সঙ্গে আরও দু-একটা নিয়ম জুড়ে দিলেই কাজ হয়ে যায়, মানে—ঐসব নির্ণয় পদ্ধতি দিয়েই ও রকম বাক্য বা যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা করা যায়। এ নিয়মগুলি বলার আগে ব্যক্তিবাক্য সম্পর্কে দু একটা কথা বলে নেওয়া দরকার।

২. ব্যক্তিবাক্য ও নির্ণয় সমস্যা

আমরা জানি, নতুন সংকেতলিপিতে ব্যক্তিবাক্য লেখা হয় এভাবে : প্রথমে বিধেয় অক্ষর, তার ডানধারে ব্যক্তিনাম—বিধেয় অক্ষর বড় হাতের, আর ব্যক্তিনাম ছোট হাতের, অক্ষরে। যেমন

Aristotle is wise $= Wa$

Buddha is wise $= Wb$

Confucius is wise $= Wc$

আরও জানি, এ বাক্যগুলির আকার দেখানো হয় ব্যক্তিনামের জায়গায় ব্যক্তিগ্রাহক x, y ইত্যাদি বসিয়ে। যেমন, এ সংকেতগুলিতে উক্ত ব্যক্তিবাক্যগুলির আকার হল :

$$Wx$$

সাধারণভাবে আমরা x, y ইত্যাদি ব্যবহার করব ব্যক্তি গ্রাহক হিসাবে। আর নাম হিসাবে ব্যবহার করব a, b, c ইত্যাদি বা নামের আদ্যক্ষর (যেমন, Socrates is wise $= Ws$)।

আমরা যে নির্ণয় সমস্যার কথা বলেছি সে সমস্যাটা ঠিক কী তা ভাল করে বোঝা দরকার। সমস্যা আসলে ব্যক্তিবাক্য নিয়ে নয়। কেন এ কথা বলছি, দেখ। নিচের উদাহরণগুলির দিকে নজর দাও। দেখবে এদের সব বাক্য-অঙ্গ বা যুক্তি-অবয়ব ব্যক্তিবাক্য।

(১) $[(Hs \supset Ms) \cdot Hs] \supset Ms$

(২) $Ha \supset Ma, \sim Ma \quad \therefore \quad \sim Ha$

দেখ, এদের বৈধতা নির্ণয়ের বেলায় নতুন কোনো সমস্যা ওঠে না। বাক্য যুক্তিবিজ্ঞান অনুমোদিত পদ্ধতি দিয়েই এদের বৈধতা নির্ণয় করা যায়। যেমন, তোমরা নিশ্চয়ই বলবে : (১) হল

$$[(p \supset q) \cdot p] \supset q$$

এ বৈধ বাক্যের নিবেশন দৃষ্টান্ত, সুতরাং বৈধ। আর (২) হল MT আকারের যুক্তি, সুতরাং বৈধ। প্রসঙ্গত, বাক্য-যুক্তিবিজ্ঞান-স্বীকৃত বৈধ আকারে ব্যক্তিবাক্য নিবেশন করে যা পাওয়া যাবে তাই বৈধ।

আসলে নির্ণয় সমস্যাটা হল এমন যৌগিক বাক্য ও যুক্তি নিয়ে—যাতে অঙ্গবাক্য বা অবয়ব হিসাবে ব্যক্তিবাক্যও আছে, আবার মানকিত বাক্যও আছে। এ রকমের বাক্যকে আমরা মিশ্র বাক্য বলে, আর এ রকমের যুক্তিকে মিশ্র যুক্তি বলে, উল্লেখ করব। তার মানে

মিশ্র যুক্তি = যে যুক্তির কোনো অবয়ব মানকিত বাক্য, আর কোনো অবয়ব ব্যক্তিবাক্য

মিশ্র বাক্য = যে যৌগিক বাক্যের কোনো অঙ্গ মানকিত বাক্য আর, আর কোনো অঙ্গ ব্যক্তিবাক্য

তাহলে, এখন বলতে পারি, নির্ণয় সমস্যা ওঠে মিশ্র বাক্য ও মিশ্র যুক্তি নিয়ে।

৩. একাক্ষরবিধেয় ব্যক্তিবাক্য : ব্যক্তিবাক্য ও নামসঞ্চালন সূত্র

ব্যক্তিবাক্যের উদাহরণ হিসাবে আমরা নিয়েছি এরকম বাক্য

Wa, Wb, Hs, Ms

ইত্যাদি। এ জাতীয় বাক্যে যে বিধেয় তা হল একাক্ষর, অযৌগিক বা একক। কিন্তু, আমরা জানি, বিধেয় অনেক অক্ষর দিয়ে গঠিত হতে পারে। যেমন $(F.G.H)s$ বা $FGHs$—Socrates is friendly generous and honest—এ বাক্যের বিধেয় তিনটি অক্ষর দিয়ে গঠিত। বিধেয় আরও অনেক জটিল আকার ধারণ করতে পারে। তাহলে

বিধেয় একাক্ষরও হতে পারে, অনেকাক্ষরও হতে পারে। কাজেই আমরা দু রকম ব্যক্তি বাক্যের কথা বলতে পারি

(১) একাক্ষরবিধেয় ব্যক্তিবাক্য [যথা : $(Wx, Hx$]

(২) অনেকাক্ষরবিধেয় ব্যক্তিবাক্য [যথা : $(E \supset G)x$
$\{[(F \supset G) \cdot F] \supset G\}x$]

এখন, যে ব্যক্তিবাক্যে অনেকাক্ষর বিধেয় তাকে এমন সত্যাপেক্ষ বাক্যে রূপান্তরিত করা যায় —যার প্রত্যেকটি অঙ্গবাক্য এক একটি একাক্ষরবিধেয় ব্যক্তিবাক্য।
যায়, নিম্নোক্ত সূত্রগুলি প্রয়োগ করে—

$(F \cdot G)x$ সম $Fx \cdot Gx$
$(F \vee G)x$ সম $Fx \vee Gx$
$(F \supset G)x$ সম $Fx \supset Gx$
$(F \equiv G)x$ সম $Fx \equiv Gx$

দু একটা উদাহরণ দিলেই সূত্রগুলির যাথার্থ্য বোঝা যাবে। মনে কর, x=রাম, F= মোটা (Fat), G= লোভী (Greedy)। এটা সহজবোধ্য যে

রাম মোটা এবং লোভী $(F \cdot G)$
equiv রাম মোটা · রাম লোভী
রাম মোটা অথবা লোভী $(F \vee G)$
equiv রাম মোটা v রাম লোভী
রাম মোটা হলে লোভী $(F \supset G)$
equiv রাম মোটা ⊃ রাম লোভী

উক্ত সূত্রগুলি এক রকম সঞ্চালন সূত্র। এদের আমরা নাম সঞ্চালন সূত্র, বা ব্যক্তিগ্রাহক সঞ্চালন সূত্র, বলে অভিহিত করতে পারি। নাম সঞ্চালন সূত্র প্রসঙ্গে মানক সঞ্চালন সূত্রের কথা মনে পড়ার কথা। বলা বাহুল্য নিম্নোক্ত সূত্রগুলি মানক সঞ্চালন সূত্র।

$\exists(F \vee G)$ সম $\exists F \vee \exists G$
$U(F \cdot G)$ সম $UF \cdot UG$

প্রথম সূত্রটির সঙ্গে আগেই আমাদের পরিচয় হয়েছে। দ্বিতীয় সূত্রটি এই প্রথম উত্থাপন করা হল।

প্রসঙ্গান্তর থেকে এবার আগের কথায় ফিরে যাই। আমরা বলছিলাম : অনেকাক্ষর বিধেয় ব্যক্তিবাক্যকে এমন সত্যাপেক্ষ বাক্যে রূপান্তরিত করা যায় যার প্রত্যেকটি অঙ্গবাক্য একাক্ষরবিধেয় ব্যক্তিবাক্য। উদাহরণ

$\{[H \vee (H \cdot G] \supset H\}x$ সম $[Hx \vee (Hx \cdot Gx)] \supset Hx$

৪. মিশ্র বাক্য ও নির্ণয় সমস্যা

আমরা বলেছিলাম, আমাদের নির্ণয় সমস্যা—মিশ্র যুক্তি ও মিশ্র বাক্য নিয়ে। সমস্যাটা আরও সীমিত করে বলতে পারি : সমস্যা কেবল মিশ্রবাক্য নিয়ে, কি করে মিশ্র

বাক্যের বৈধতা নির্ণয় করা যাবে—এ সমস্যা। কেননা, মিশ্র যুক্তির বৈধতা অবৈধতা নির্ভর করে অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক বাক্য বৈধ কি অবৈধ তার ওপর। এটা নিশ্চয়ই তোমাদের মনে আছে যে ঃ সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি প্রসঙ্গে আমরা এক প্রস্ত বাক্য-রূপান্তর নিয়ম উল্লেখ করেছি (যেগুলি সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতির বেলায়ও খাটে) ; আর এক প্রস্ত রূপান্তর নিয়ম উল্লেখ করেছি প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি প্রসঙ্গে। এখন আমরা আরও দু প্রস্ত বাক্য-রূপান্তর নিয়ম উল্লেখ করব। এগুলি মিশ্র বাক্যের রূপান্তর নিয়ম (পরবর্তী বিভাগ দ্রষ্টব্য)।

মিশ্র বাক্যের কোনো অংশ মানকিত বাক্য, আর কোনো অংশ ব্যক্তিবাক্য। দেখা যাবে, মিশ্র বাক্যের যে অংশ মানকিত তার বেলায় খাটে মানকিত বাক্য রূপান্তরের নিয়ম, আগেই-উল্লেখ-করা দু প্রস্ত নিয়ম (অধ্যায় ১৩ ও অধ্যায় ১৪ দ্রষ্টব্য)। আর মিশ্র বাক্যের যে অংশ ব্যক্তিবাক্য তার জন্য দরকার অতিরিক্ত রূপান্তর নিয়ম। এ নিয়ম রচনা করতে পারলেই আমাদের সমস্যার সমাধান হয়ে যায়। পরবর্তী বিভাগের লক্ষ্য এ রকম নিয়ম রচনা।

৫. মিশ্র বাক্যের রূপান্তর নিয়ম ঃ
প্রথম প্রস্ত

অধ্যায় ১৪-এতে যে রূপান্তর নিয়মগুলি উল্লেখ করা হয়েছে সেগুলি মিশ্রবাক্যের মানকিত অংশের বেলায়ও খাটে। নিচের নিয়মগুলির পুনরুক্তি করা হল। আর ব্যক্তিবাক্য অংশের জন্য দুটো নতুন নিয়ম যোগ করা হল।

(ক) বাক্য যুক্তিবিজ্ঞানের বিভিন্ন রূপান্তর-সূত্র প্রয়োগ করে, বাক্যটিকে* বৈকল্পিকে বা বৈকল্পিক-দিয়ে-গঠিত সংযৌগিকে রূপান্তরিত করতে হবে ; **

(খ) QE প্রয়োগ করে মানকের বামধারের $\sim$ বর্জন করতে হবে ;

(গ) কোনো পর্যায়ে যদি কোনো বৈকল্পিকে একাধিক বুলীয় সত্ত্ব বাক্য দেখা দেয় তাহলে (Assoc., Com., LED ইত্যাদি প্রয়োগ করে) সেগুলিকে একটি বুলীয় সত্ত্ব বাক্যে রূপান্তরিত করতে হবে ;

(ঘ) যদি কোনো বৈকল্পিকে এমন একাধিক ব্যক্তিবাক্য থাকে যাতে ব্যক্তিগ্রাহকগুলি অভিন্ন, তাহলে, সঞ্চালন সূত্রের সাহায্যে, অভিন্ন ব্যক্তিগ্রাহক ব্যক্তিবাক্যগুলিকে একই ব্যক্তিবাক্যে রূপান্তরিত করতে হবে ;

যেমন

$$[Fx \supset (F \vee G)x] \cdot [\sim Gy \supset (\sim G \vee F)y]$$

-এর জায়গায় লিখতে হবে

$$[F \supset (F \vee G)]x \cdot [\sim G \supset (\sim G \vee F)y]$$

---

* যে মিশ্র বাক্যটিকে রূপান্তরিত করতে চাও সেটিকে। রূপান্তরের সময় এ কথাটা মনে রাখবে ঃ মানকিত বাক্য ও ব্যক্তিবাক্যের (অঙ্গবাক্যের) প্রত্যেকটিকে একক মনে করতে হবে। মানে—এসব p, q ইত্যাদির মত আণবিক বাক্য—এ কল্পনা করতে হবে।

** মানে *CNF*-এতে রূপান্তরিত করতে হবে।

(ঙ) এর পর প্রত্যেকটি ব্যক্তিবাক্যকে সার্বিক বাক্যে রূপান্তরিত করতে হবে, মানে—ব্যক্তিবাক্যের সর্বদক্ষিণের x (বা y বা z, মানে ব্যক্তিগ্রাহক) বাদ দিয়ে এর বামে U লিখতে হবে।

সর্বশেষে নিয়মটি আপত্তিকর মনে হতে পারে। কিন্তু নিয়মটি মেনে নিতে আপত্তি করো না। পরে এর যাথার্থ্য দেখানো হবে। এ মুহূর্তে বলব: গতানুগতিক যুক্তিবিজ্ঞানে যখন বলা হয় ব্যক্তিবাক্য মাত্রই সার্বিক বাক্য বলে গণ্য তখন ত আপত্তি কর না। এখনও আপত্তি না করে নিয়মটা মেনে নাও।

কোনো মিশ্রবাক্যকে এভাবে রূপান্তরিত করতে পারলে

সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতির বৈধতা-নিয়ম, বা

সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতির বৈধতা-নিয়ম

দিয়ে বাক্যটির বৈধতা অনায়াসে নির্ণয় করা যায়। উদাহরণ

ধর

$$U(G \supset H), Gx \qquad Hx$$

এ যুক্তি আকারের বা নিম্নোক্ত বাক্যের বৈধতা নির্ণয় করতে হবে :

$$[U(G \supset H) \cdot Gx] \supset Hx$$

এ বাক্যটি থেকে পরপর পাই

$$\sim[U(G \supset H) \cdot Gx] \vee Hx$$

$$\sim U(G \supset H) \vee \sim Gx \vee Hx \qquad [\text{(ক) নিয়ম}]$$

$$\exists \sim(G \supset H) \vee \sim Gx \vee Hx \qquad [\text{(খ) নিয়ম}]$$

$$\exists G\bar{H} \vee \bar{G}x \vee Hx$$

এখানে একটিমাত্র বুলীয় সত্ত্ব বাক্য, সুতরাং (গ) নিয়ম প্রয়োগের কথা ওঠে না। শেষোক্ত বাক্য থেকে পাই

$$\exists G\bar{H} \vee (\bar{G} \vee H)x \qquad [\text{(ঘ) নিয়ম}]$$

এতে আছে একটি ব্যক্তিবাক্য। এ ব্যক্তিবাক্যটিকে সার্বিক বাক্যে রূপান্তরিত করে পাই

$$\exists G\bar{H} \vee U(\bar{G} \vee H) \qquad [\text{(ঙ) নিয়ম}]$$

রূপান্তরের কাজ এতক্ষণে শেষ হল। এখন এ বাক্যটি নিয়ে সৎ বৈকল্পিকের বৈধতা-নিয়মও প্রয়োগ করতে পার, সত্ত্ব প্রাকল্পিকের বৈধতা-নিয়মও প্রয়োগ করতে পার, তোমার যা খুশি। নিচে প্রথমে প্রথম পদ্ধতিটির, তারপর দ্বিতীয় পদ্ধতিটির প্রয়োগ দেখানো হল।

সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতির প্রয়োগ

এ পদ্ধতির বৈধতা-নিয়ম অনুসারে (পৃঃ ২১১ দ্রষ্টব্য)

$$\exists G\bar{H} \vee U(\bar{G} \vee H)$$

বৈধ হবে যদি

$$G\bar{H} \vee (\bar{G} \vee H)$$

বা $G\bar{H} \vee \bar{G} \vee H$ বৈধ হয়। নানাভাবে এর বৈধতা নির্ণয় করা যায়। আমরা আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ দিয়ে এর বৈধতা পরীক্ষা করলাম।

$$G\bar{H} \vee \bar{G} \vee H$$

$$1\bar{H} \vee 0 \vee H \qquad\qquad 0\bar{H} \vee 1 \vee H$$

$$\bar{H} \vee H \qquad\qquad 1$$

$$1$$

বলা বাহুল্য, পরীক্ষায় দেখা গেল—বাক্যটি বৈধ।

সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতির প্রয়োগ

আলোচ্য বাক্যে এ পদ্ধতি প্রয়োগ করতে হলে বাক্যটির

$$\exists G\bar{H} \vee U(\bar{G} \vee H)$$

এর U বর্জন করা দরকার (পৃঃ ১৭৩ দ্রষ্টব্য)। এ বাক্যে U-এর জায়গায় $\sim\exists\sim$ লিখে পাই

$$\exists G\bar{H} \vee \sim\exists\sim (\bar{G} \vee H)$$

আর এ বাক্য থেকে পর পর পাই

$$\exists G\bar{H} \vee \sim\exists G\bar{H} \qquad [DM, DN]$$

$$\sim\exists G\bar{H} \vee \exists G\bar{H} \qquad [Com.]$$

$$\exists G\bar{H} \supset \exists G\bar{H}$$

শেষোক্ত বাক্যটি একটা সত্ত্ব প্রাকল্পিক বাক্য। বাক্যটি $p \supset p$ আকারের; সুতরাং বৈধ। সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতির প্রয়োগ দেখাবার জন্য এতদূর অগ্রসর হলাম। নইলে

$$\exists G\bar{H} \vee \sim\exists G\bar{H}$$

এ পর্বেই থামা যেত; বলা যেত, এটা $p \vee \sim p$-এর নিবেশন-দৃষ্টান্ত; সুতরাং বৈধ।

৬. ন্যায় ও ব্যক্তিবাক্য

এ অধ্যায়ের সুরুতে আমরা বৈধতা নির্ণয় সমস্যা তুলেছিলাম দুটি ন্যায় নিয়ে। যে বৈশিষ্ট্য হেতু ন্যায়গুলি সম্পর্কে নির্ণয় সমস্যা উঠেছিল সে বৈশিষ্ট্য হল: এ ন্যায়গুলির কোনো অবয়ব ব্যক্তিবাক্য। ব্যক্তিবাক্য কেবল যে ন্যায়েরই অবয়ব হতে পারে তা নয়। ন্যায়-নয়-এমন যুক্তিতেও ব্যক্তিবাক্য কোনো অবয়ব হিসাবে দেখা দিতে পারে। কাজেই এরূপ যুক্তি প্রসঙ্গেও অনুরূপ সমস্যা ওঠে। তবে আমরা সমস্যাটা তুলেছিলাম ন্যায় নিয়ে। আর ওপরে যে উদাহরণটি নিয়ে বৈধতা পরীক্ষা করা হল, লক্ষ করে থাকবে, সেটিও,

$$U(G \supset H),\ Gx \quad \therefore \quad Hx$$

এ যুক্তিও, ন্যায়, Barbara মূর্তির ন্যায়, যাতে দু-দুটি অবয়ব ব্যক্তিবাক্য। নিচে আরও

বেশ কয়টা যুক্তির বৈধতা-পরীক্ষা দেখানো হল। এগুলির অধিকাংশ ন্যায় যুক্তি বা ন্যায় বাক্য। এজন্য, মনে হল, এখানে ন্যায় সম্পর্কে—যে ন্যায়ের কোনো অবয়ব ব্যক্তিবাক্য সেসব ন্যায় সম্পর্কে—দু-একটা কথা বলে নেওয়া ভাল।

বিধেয় মাত্রই কোনো শ্রেণী, ধর্ম, বা সম্বন্ধ বোঝায়। সুতরাং ব্যক্তিনাম বাক্যের বিধেয় হতে পারে না। সুতরাং যে কোনো সংস্থানের ন্যায়ে যে কোনো অবয়ব ব্যক্তিবাক্য হতে পারে না। কোন্ সংস্থানে কোন্ অবয়ব ব্যক্তিবাক্য হতে পারে (বা পারে না) তা দেখা যাক।

প্রথম সংস্থান

G—H
F—G
∴ F—H

এ সংস্থানে ব্যক্তিনাম থাকতে পারে অপ্রধান পদ হিসাবে, ফলে—ব্যক্তিবাক্য থাকতে পারে অপ্রধান হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত হিসাবে।

হেতু ঃ ব্যক্তিনাম বিধেয় হতে পাবে না, আর এ সংস্থানে প্রধান পদ বিধেয়, মধ্যপদ একবার বিধেয় (একবার উদ্দেশ্য)।*

দ্বিতীয় সংস্থান

H—G
F—G
∴ F—H

এ সংস্থানেও ব্যক্তিনাম থাকতে পারে অপ্রধান পদ হিসাবে। ফলে—ব্যক্তিবাক্য থাকতে পারে অপ্রধান হেতুবাক্য ও সিদ্ধান্ত হিসাবে।

হেতু ঃ ব্যক্তিনাম বিধেয় হতে পারে না, আর এ সংস্থানে মধ্যপদ বিধেয়, প্রধান পদ একবার বিধেয় (একবার উদ্দেশ্য)।

তৃতীয় সংস্থান

G—H
G—F
∴ F—H

এ সংস্থানে ব্যক্তিনাম থাকতে পারে মধ্যপদ হিসাবে, ফলে ব্যক্তিবাক্য থাকতে পারে কেবল হেতুবাক্য হিসাবে।

হেতু ঃ ব্যক্তিনাম বিধেয় হতে পারে না, আর এ সংস্থানে প্রধান পদ বিধেয়, অপ্রধান পদ একবার বিধেয় (একবার উদ্দেশ্য)।

চতুর্থ সংস্থান

H—G
G—F
∴ F—H

এ সংস্থানে ব্যক্তিনামের স্থান নেই, ফলে কোনো অবয়বই ব্যক্তিবাক্য হতে পারে না।

হেতু ঃ ব্যক্তিনাম বিধেয় হতে পারে না, আর এ সংস্থানে প্রত্যেকটি পদ একবার বিধেয় (একবার উদ্দেশ্য)।

* এ বিভাগের বাকি অংশে 'উদ্দেশ্য' 'বিধেয়' এ কথাগুলি গতানুগতিক অর্থে ব্যবহৃত হল।

গতানুগতিক মতে ব্যক্তিবাক্য হল A বা E বাক্য। আর A, E সিদ্ধান্ত হতে পারে কেবল এ তিনটি মূর্তিতে

$$AAA,\ AEE,\ EAE$$

কাজেই ব্যক্তিবাক্য সিদ্ধান্ত (বা হেতুবাক্য) হিসাবে পেতে পারি কেবল এ মূর্তিগুলিতে। তবে জাতিবিষয়ক A, E থেকে পৃথক করার জন্য আমরা ব্যক্তিবিষয়ক A বোঝাব a দিয়ে, আর ব্যক্তিবিষয়ক E বোঝাব e দিয়ে।

ধর, আমাদের লক্ষ্য হল এমন বৈধ ন্যায়ের তালিকা তৈরী করা—যে ন্যায়ের কোনো অবয়ব ব্যক্তিবাক্য। ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে, তাহলে আমাদের পরীক্ষা করতে হবে নিম্নোক্ত মূর্তিগুলির বৈধতা :

প্রথম সংস্থানে Aaa, Eae, Aee

দ্বিতীয় সংস্থানে Eae, Aee, Aaa

তৃতীয় সংস্থানে aaI, eaO, aeE

যদি এ মূর্তিগুলির বৈধতা পরীক্ষা কর তাহলে দেখবে : উক্ত সারণীর প্রত্যেক সারির সর্বশেষ মূর্তিটি অবৈধ, অন্যগুলি বৈধ। তার মানে, প্রথম তিন সংস্থানের প্রত্যেকটিতে দুটি করে বৈধ মূর্তি। নিচে এ মূর্তিগুলির কয়টির বৈধতা পরীক্ষা করে দেওয়া হল।

৭. কয়েকটি ন্যায়ের বৈধতা পরীক্ষা

প্রথম সংস্থানে Eae

$$U(G \supset \sim H).\quad Gx \quad \therefore \quad \sim Hx$$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকের রূপান্তর

$$[U(G \supset \bar{H}) \quad Gx] \supset \bar{H}x \qquad (1)$$

$$\sim[\qquad\qquad] \vee \bar{H}x \qquad (2)$$

$$\sim U(G \supset \bar{H}) \vee \bar{G}x \vee \bar{H}x \qquad (3)$$

$$\exists \sim(G \supset \bar{H}) \vee \bar{G}x \vee \bar{H}x \qquad (4)$$

$$\exists GH \vee \bar{G}x \vee \bar{H}x \qquad (5)$$

$$\exists GH \vee (\bar{G} \vee \bar{H})x \qquad (6) \quad \text{[ব্যক্তিগ্রাহক সঞ্চালন]}$$

$$\exists GH \vee U(\bar{G} \vee \bar{H}) \qquad (7) \quad \text{[(৬) নিয়ম]}$$

সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ

(7) বৈধ হবে যদি এমন হয় যে

$$GH \vee \bar{G} \vee \bar{H}$$

বৈধ। এ বাক্যে আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ প্রয়োগ করে দেখতে পাই—বাক্যটি বৈধ।

$$GH \vee \bar{G} \vee \bar{H}$$

$$1H \vee 0 \vee \bar{H}, \qquad 0H \vee 1 \vee \bar{H}$$

$$H \vee \bar{H} \qquad\qquad 1$$

$$1$$

সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি

এ পদ্ধতি প্রয়োগ করে আলোচ্য মূর্তির বৈধতা পরীক্ষা করতে হলে (7) পর্যন্ত এসে (7)-এর U পরিবর্তন করতে হবে। তা করে, পরপর পাব

$$\exists GH \vee U(\bar{G} \vee \bar{H})$$
$$\exists GH \vee \sim\exists\sim(\bar{G} \vee \bar{H})$$
$$\exists GH \vee \sim\exists GH$$
$$\sim\exists GH \vee \exists GH$$
$$\exists GH \supset \exists GH$$

বলা বাহুল্য, এ সত্ত্ব প্রাকল্পিকটি বৈধ।

প্রথম সংস্থানে *Aee*

$$U(G \supset H), \sim Gx \quad \therefore \quad \sim Hx$$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকের রূপান্তর

$$[\, U(G \supset H) \cdot \bar{G}x] \supset \bar{H}x$$
$$\sim[\quad , \qquad\qquad] \vee \bar{H}x$$
$$\sim U(G \supset H) \vee Gx \vee \bar{H}x$$

....

....

$$\exists G\bar{H} \vee (Gx \vee \bar{H}x)$$
$$\exists G\bar{H} \vee U(G \vee \bar{H})$$

সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ

$$G\bar{H} \vee G \vee \bar{H}$$

-এর সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করে পাই

$$G\bar{H} \vee G \vee \bar{H}$$

$$1\bar{H} \vee 1 \vee \bar{H} \qquad 0\bar{H} \vee 0 \vee \bar{H}$$

$$1 \qquad\qquad \bar{H}$$

$$0 \quad 1$$

বৈকল্পিক বাক্যটি অবৈধ ∴ সৎ বৈকল্পিকটি অবৈধ ∴ ন্যায় বাক্যটি অবৈধ ∴ ন্যায়মূর্তিটি অবৈধ।

সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ

.. ..

$$\exists G\bar{H} \vee U(G \vee \bar{H})$$
$$\exists G\bar{H} \vee \sim\exists\sim(G \vee \bar{H})$$
$$\exists G\bar{H} \vee \sim\exists\bar{G}H$$

$\sim \exists \bar{G}H \vee \exists G\bar{H}$

$\exists \bar{G}H \supset \exists G\bar{H}$

Fell Swoop

ধর, $G=0$, $H=1$; তাহলে

$\bar{G}H \supset G\bar{H}$

00

0

প্রাকল্পিক বাক্যটি অবৈধ ∴ সত্ত্ব প্রাকল্পিকটি অবৈধ ∴ ন্যায় বাক্যটি অবৈধ ∴ ন্যায়মূর্তিটি অবৈধ।

দ্বিতীয় সংস্থানে *Aaa*

$U(H \supset G),\ Gx \ \therefore\ Hx$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকের রূপান্তর

$[U(H \supset G) \cdot Gx] \supset Hx$

$\sim[\qquad\qquad] \vee$

$\sim U(H \supset G) \vee \bar{G}x \vee Hx$

....

$\exists H\bar{G} \vee \bar{G}x \vee Hx$

$\exists H\bar{G} \vee (\bar{G} \vee H)x$

$\exists H\bar{G} \vee U(\bar{G} \vee H)$

সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ

শেষোক্ত বাক্যটি বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে

$H\bar{G} \vee \bar{G} \vee H$

বৈধ। এতে আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ প্রয়োগ করে পাই

$HG \vee \bar{G} \vee H$

$1\bar{G} \vee \bar{G} \vee 1 \qquad 0\bar{G} \vee \bar{G} \vee 0$

$1 \qquad\qquad \bar{G}$

0 1

বৈকল্পিকটি অবৈধ ∴ ......ন্যায় মূর্তিটি অবৈধ।

সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ

....

$\exists H\bar{G} \vee U(\bar{G} \vee H)$

$\exists H\bar{G} \vee \sim\exists\sim(\bar{G} \vee H)$

$\exists H\bar{G} \vee \sim\exists G\bar{H}$

$\sim\exists G\bar{H} \vee \exists H\bar{G}$

$\exists G\bar{H} \supset \exists H\bar{G}$

Fell Swoop

ধর, $G=1$, $H=0$; তাহলে

$$\exists G\bar{H} \supset \exists H\bar{G}$$

00

0

প্রাকল্পিক বাক্যটি অবৈধ ∴ ......ন্যায় মূর্তিটি অবৈধ।

তৃতীয় সংস্থানে *aaI*

$Hx, Fx \;\therefore\; \exists FH$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকের রূপান্তর

$(Hx \cdot Fx) \supset \exists FH$

....

$\bar{H}x \vee \bar{F}x \vee \exists FH$

$(\bar{H} \vee \bar{F})x \vee \exists FH$

$U(\bar{H} \vee \bar{F}) \vee \exists FH$

সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ

$\bar{H} \vee \bar{F} \vee FH$

$0 \vee \bar{F} \vee F1 \qquad 1 \vee \bar{F} \vee F0$

$\bar{F} \vee F \qquad 1$

1

সিদ্ধান্ত : তৃতীয় সংস্থানে *aaI* বৈধ।

সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ

$U(\bar{H} \vee \bar{F}) \vee \exists FH$

$\sim\exists\sim(\bar{H} \vee \bar{F}) \vee \exists FH$

$\sim\exists HF \vee \exists FH$

$\sim\exists FH \vee \exists FH$ (Com.*)

$\exists FH \supset \exists FH$

এ বাক্যটি $p \supset p$-এর নিবেশন দৃষ্টান্ত, সুতরাং বৈধ।

সিদ্ধান্ত : তৃতীয় সংস্থানে *aaI* বৈধ।

তৃতীয় সংস্থানে *eaO*

$\sim Hx, Fx \;\therefore\; \exists F\bar{H}$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকের রূপান্তর

$(\bar{H}x \cdot Fx) \supset \exists F\bar{H}$

....

....

---

*HF সম FH

$Hx \vee \bar{F}x \vee \exists F\bar{H}$
$(H \vee \bar{F})x \vee \exists F\bar{H}$
$U(H \vee \bar{F}) \vee \exists F\bar{H}$

সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ

$H \vee \bar{F} \vee F\bar{H}$

$1 \vee \bar{F} \vee F0$ | $0 \vee \bar{F} \vee F1$
1 | $\bar{F} \vee F$
| 1

সিদ্ধান্ত ঃ তৃতীয় সংস্থানে *eaO* বৈধ।

সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ

$U(H \vee \bar{F}) \vee \exists F\bar{H}$
... .
$\sim\exists\bar{H}F \vee \exists F\bar{H}$
$\sim\exists F\bar{H} \vee \exists F\bar{H}$ (Com.)
$\exists F\bar{H} \supset \exists F\bar{H}$

সিদ্ধান্ত ঃ তৃতীয় সংস্থানে *eaO* বৈধ।

দেখা গেল, তৃতীয় সংস্থানে *aaI*, *eaO*—এ মূর্তি দুটি বৈধ।

এ প্রসঙ্গে একটা ব্যাপার বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য। বুলীয় মতে, সুতরাং বিধেয় যুক্তিবিজ্ঞান অনুসারে, তৃতীয় সংস্থানে

AAI (Darapti) *EAO* (Felapton) অবৈধ।

কিন্তু দেখা গেল, যদি মধ্যপদ ব্যক্তিনাম হয়, মানে দুটি হেতুবাক্যই ব্যক্তিবাক্য হয়, তাহলে

Darapati, Felapton—এ মূর্তি দুটিও বৈধ।

৮. একটা জটিল উদাহরণ

$\{(\exists F\bar{G} \vee Gx) \supset [\bar{H}y \supset U(\bar{F} \supset GH)]\} \supset [Fx \supset (F \vee H)y]$

এ বাক্যটির বৈধতা নির্ণয় করতে হবে।

রূপান্তর-নিয়মগুলি পরপর প্রয়োগ করে এ বাক্যটিকে ঈপ্সিত আকারে আনার চেষ্টা করা যাক (পৃঃ ২২৫ দেখ)।

(ক) নিয়মের প্রয়োগ

$\sim\{ \qquad \} \vee [Fx \supset (F \vee H)y]$
$\{(\exists F\bar{G} \vee Gx) \cdot \sim[\qquad]\} \vee$
$\{(\exists F\bar{G} \vee Gx) \cdot \bar{H}y \cdot \sim U(\bar{F} \supset GH)]\} \vee$
$\{ \qquad \} \vee \bar{F}x \vee (F \vee H)y$
$\bar{F}x \vee (F \vee H)y \vee \{ \qquad \}$ [Com.]

$\sim(p \supset q)$ সম $(p \cdot \sim q)$—এ সূত্র অনুসারে

$$[\bar{F}x \vee (F \vee H)y \vee \exists F\bar{G} \vee Gx] \cdot$$
$$[\bar{F}x \vee (F \vee H)y \vee \bar{H}y] \cdot$$
$$[\bar{F}x \vee (F \vee H)y \vee \sim U(\bar{F} \supset GH)] \qquad \text{[Dist.]}$$

(খ) নিয়মের প্রয়োগ

সংযোগীগুলির মধ্যে কেবল তৃতীয়টিতে মানকের বামে ~ আছে। নিষেধ চিহ্নটি তুলে দিয়ে এ সংযোগীটি এভাবে লিখতে হবে

$$\bar{F}x \vee (F \vee H)y \vee \exists \sim(\bar{F} \supset GH) \qquad \text{[তৃতীয় সংযোগী]}$$

(গ) নিয়মের প্রয়োগের কথা ওঠে না ; কেননা কোনো সংযোগীতেই একাধিক বুলীয় সত্ত্ব বাক্য নেই।

(ঘ) নিয়মের প্রয়োগ

প্রথম ও দ্বিতীয় সংযোগীতে এমন ব্যক্তিবাক্য আছে যাতে ব্যক্তিগ্রাহক অভিন্ন। Com., Assoc. ইত্যাদি প্রয়োগ করে এবং ব্যক্তিগ্রাহক সঞ্চালন করে প্রথম ও দ্বিতীয় সংযোগী এভাবে লিখতে পারি :

$$(\bar{F} \vee G)x \vee (F \vee H)y \vee \exists F\bar{G} \qquad \text{[প্রথম সংযোগী]}$$
$$\bar{F}x \vee (F \vee H \vee \bar{H})y \qquad \text{[দ্বিতীয় সংযোগী]}$$

একসঙ্গে চোখের সামনে রাখার জন্য তিনটি সংযোগীকে I, II, III দিয়ে চিহ্নিত করে, পৃথক পৃথক ছত্রে লিখলাম। Com. প্রয়োগ করে প্রথম ও তৃতীয় সংযোগীর অন্তর্গত বুলীয় সত্ত্ব বাক্য বামধারে আনা হল।

I $\exists F\bar{G} \vee (\bar{F} \vee G)x \vee (F \vee H)y$

II $\bar{F}x \vee (F \vee H \vee \bar{H})y$

III $\exists \sim(\bar{F} \supset GH) \vee \bar{F}x \vee (F \vee H)y$

(ঙ) নিয়মের প্রয়োগ

(I) $\exists F\bar{G} \vee U(\bar{F} \vee G) \vee U(F \vee H)$

(II) $U\bar{F} \vee U(F \vee H \vee \bar{H})$

(III) $\exists \sim(\bar{F} \supset GH) \vee U\bar{F} \vee U(F \vee H)$

রূপান্তরের কাজ শেষ হল। এবার বৈধতা নির্ণয়ের কাজ। মূল বাক্যটিকে রূপান্তরিত করে যে বাক্যে পৌঁছেছি তা একটা সংযৌগিক বাক্য। এবং, বলা বাহুল্য, এ বাক্য বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এর প্রত্যেকটি সংযোগী বৈধ হয়।

প্রথমে (I)। এ বাক্যটি হল ⴺক v Uখ v Uগ আকারের (পৃঃ ২১০ দ্রষ্টব্য)। এবং এ বাক্যটি বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে

$$F\bar{G} \vee \bar{F} \vee G \qquad (১)$$
$$F\bar{G} \vee F \vee H \qquad (২)$$

এ বাক্য দুটির কোনোটি বৈধ (পৃঃ ২১১ দ্রষ্টব্য)। সত্যমূল্য বিশ্লেষণ করলে দেখবে, (১) বৈধ, যদিও (২) অবৈধ। সুতরাং (I) বৈধ।

এবার (II)। এ বাক্যটি হল Uক v Uখ আকারের (পৃঃ ২১০ দ্রষ্টব্য)। এবং এ বাক্যটি বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে

$$\bar{F} \qquad (৩)$$

$$F \vee H \vee \bar{H} \qquad (৪)$$

এ বাক্য দুটির কোনোটি বৈধ (পৃঃ ২১১ দ্রষ্টব্য)। (৩) স্পষ্টতই অবৈধ, আর (৪) স্পষ্টতই বৈধ। সুতরাং (II) বৈধ।

সবশেষে (III)। এ বাক্যটি, (I)-এর মত, ∃ক v Uখ v Uগ আকারের (পৃঃ ২১০ দ্রষ্টব্য)। এবং এ বাক্যটি বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে

$$\sim(\bar{F} \supset GH) \vee \bar{F} \qquad (৫)$$

$$\sim(\bar{F} \supset GH) \vee F \vee H \qquad (৬)$$

এ বাক্য দুটির কোনোটি বৈধ (পৃঃ ২১১ দ্রষ্টব্য)। আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ করে দেখা যাক (৫), (৬) বৈধ কিনা।

$$\sim(\bar{F} \supset GH) \vee \bar{F} \qquad (৫')$$

$\sim(0 \supset GH) \vee 0$ $\sim(1 \supset GH) \vee 1$

~ 1 1

0

দেখা গেল, (৫) অবৈধ।

$$\sim(\bar{F} \supset GH) \vee F \vee H$$

$\sim(0 \supset GH) \vee 1 \vee H$ $\sim(1 \supset GH) \vee 0 \vee H$

1 $\sim(GH) \vee H$

$\sim(G1) \vee 1$ $\sim(G0) \vee 0$

1 ~ 0

1

দেখা গেল, (৬) বৈধ। সুতরাং (III) বৈধ।

তিনটি সংযোগীই বৈধ ; সুতরাং রূপান্তরলব্ধ বাক্যটি বৈধ ; সুতরাং মূল বাক্যটি বৈধ।

আমরা যে নির্ণয়-সমস্যা তুলেছিলাম তার সমাধান পেয়ে গেছি। সুতরাং এখানেই এ অধ্যায় শেষ করা যেত। কিন্তু কথা দিয়েছিলাম, আর এক প্রস্ত রূপান্তর-নিয়ম উল্লেখ করব (পৃঃ ২২৫ দ্রষ্টব্য)। এ অধ্যায়ের বাকি অংশে প্রতিশ্রুত রূপান্তর নিয়ম ও একটি নির্ণয় পদ্ধতির কথা বলব। তার আগে একটু ভূমিকা।

৯. মূল ব্যক্তিবাক্য

প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি ব্যাখ্যার সুরুতে আমরা প্রকোষ্ঠ সাত্ত্বিক বাক্য বা মূল বিধেয় বাক্যের কথা বলেছিলাম। এখন আর এক রকমের মূল বাক্যের কথা বলব। বলব, মূল ব্যক্তিবাক্যের কথা। মূল ব্যক্তিবাক্য বলতে কী বোঝায় কয়েকটা উদাহরণ দিলে তা বোঝা যাবে।

ধর, কোনো মিশ্র বাক্যে আছে একটা বিধেয় অক্ষর, F, আর দুটো ব্যক্তিনাম x, y* । তাহলে এ ক্ষেত্রে সম্ভব দুটি মূল ব্যক্তিবাক্য

$$Fx, \ Fy$$

আর, অবশ্যই, দুটো মূল বিধেয় বাক্য : $\exists F, \exists \bar{F}$—মোট চারটি মূল বাক্য ।

ধর, কোনো মিশ্র বাক্যে আছে দুটো বিধেয় অক্ষর, F, G । আর একটা ব্যক্তিনাম, x । এ ক্ষেত্রে সম্ভব দুটো মূল ব্যক্তিবাক্য

$$Fx, \ Gx$$

আর চারটি মূল বিধেয় বাক্য ঃ $\exists FG, \exists F\bar{G}, \exists \bar{F}G, \exists \bar{F}\bar{G}$—মোট ছটি মূল বাক্য ।

ধর, কোনো মিশ্র বাক্যে আছে দুটো বিধেয় অক্ষর, F, G আর তিনটি ব্যক্তিনাম x, y, z । তাহলে এক্ষেত্রে সম্ভব এ ছয়টি মূল ব্যক্তিবাক্য

$$Fx, Gx, , Fy, Gy , Fz, Gz$$

আর অবশ্যই উপরোক্ত চারটি মূল বিধেয় বাক্য ।

আমাদের লক্ষ্য হল কোনো মিশ্র বাক্য ব-কে এমন সমার্থক ভ-তে রূপান্তরিত করা—যে ভ-এর প্রত্যেকটি অঙ্গবাক্য হল মূল বাক্য ঃ মূল বিধেয় বাক্য বা মূল ব্যক্তিবাক্য । যেমন, দেখা যাবে

$$[U \sim (F \vee G) \vee (F\bar{G})x] \supset [\exists FG \cdot (\exists FG \cdot (\bar{G} \supset F)x]$$

এ বাক্যটিকে ঈপ্সিত আকারে রূপান্তরিত করে পাব**

$$[(\sim \exists FG \quad \sim \exists F\bar{G} \cdot \sim \exists \bar{F}G) \vee (Fx \cdot \bar{G}x)] \supset$$
$$[\exists FG \cdot (\bar{G}x \supset Fx)]$$

দেখ, এ বাক্যটি হল মূল বাক্য দিয়ে গঠিত সত্যাপেক্ষ বাক্য ।

১০. মিশ্র বাক্যের রূপান্তর-নিয়ম ঃ দ্বিতীয় প্রস্ত

অধ্যায় ১৩-এতে (প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি ব্যাখ্যা প্রসঙ্গে) যে রূপান্তর নিয়মগুলি উল্লেখ করা হয়েছে সেগুলি মিশ্রবাক্যের মানকিত অংশের বেলায়ও খাটে । নিচে এ নিয়মগুলির পুনরুক্তি করা হল । আর ব্যক্তিবাক্য অংশের জন্য একটা নতুন নিয়ম যোগ করা হল ।

(১) বাক্যটিতে সার্বিক মানক থাকলে, QE প্রয়োগ করে সার্বিক মানক পরিবর্তন করতে হবে ।

(২) বাক্যটিতে যে যে বিধেয় অক্ষর আছে প্রত্যেকটি বুলীয় পদে সে সে অক্ষর বা তার নিষেধের অনুপ্রবেশ ঘটাতে হবে , অনুপ্রবেশ ঘটাতে হবে বুলীয় বিস্তারের সাহায্যে ।

* এ বিভাগে ব্যক্তিনাম আর ব্যক্তিগ্রাহকের পার্থক্য অগ্রাহ্য করা হল x, y-ও ব্যক্তিনাম বোঝাবে ।

** কিভাবে পাব তা দেখানো হয়েছে পরবর্তী পৃষ্ঠায় ।

(৩) LED প্রয়োগ করে, প্রত্যেকটি বুলীয় পদ দিয়ে এক একটি বুলীয় সত্ত্বাক্য গঠন করতে হবেঃ মানে—প্রত্যেক বুলীয় পদের বামে ∃ নিয়ে আসতে হবে।

(৪) প্রত্যেকটি ব্যক্তিবাক্যকে এক একটি একাক্ষরবিধেয় ব্যক্তিবাক্যে রূপান্তরিত করতে হবে।

উদাহরণ ১

$$[U(G \supset H) \cdot Gx] \supset Hx$$

এ বাক্যে নিয়ম (১) প্রয়োগ করে পাই

$$[\sim\exists\sim(G \supset H) \cdot Gx] \supset Hx$$

আর শেষোক্ত বাক্যটিকে একটু সরল করে পাই

$$(\sim\exists G\bar{H} \cdot Gx) \supset Hx$$

দেখ, এখানে দ্বিতীয় ও তৃতীয় নিয়ম প্রয়োগের কথা ওঠে না, কেননা ঃ বাক্যটিতে কেবল একটি বুলীয় পদ ($G\bar{H}$), এবং এ পদটিতে আছে এ-বাক্যে-ব্যবহৃত-সব-বিধেয়-অক্ষর ; তারপর, পদটির বামে আছে ∃।

চতুর্থ নিয়ম প্রয়োগের কথাও ওঠে না, কেননা, এতে যে ব্যক্তিবাক্য আছে সেগুলি সব একাক্ষরবিধেয়।

উদাহরণ ২

$$[U\sim(F \vee G) \vee (F\bar{G})x] \supset [\exists FG \cdot (\bar{G} \supset F)x]$$

$[\sim\exists(F \vee G) \vee (F\bar{G})x] \supset$ .... [নিয়ম (১)] 1.

$[\sim(\exists F \vee \exists G) \vee$ .... [নিয়ম (৩)] 2.

এখন দরকার এ অঙ্গবাক্যে নিয়ম (2)-এর প্রয়োগ। বাক্যটির বিস্তার পৃথকভাবে দেখানো হল।

$\sim(\exists F \vee \exists G)$

$\sim[\exists F(G \vee \bar{G}) \vee \exists G(F \vee \bar{F})]$

$\sim[\exists(FG \vee F\bar{G}) \vee \exists(GF \vee G\bar{F})]$

$\sim[\exists(FG \vee F\bar{G}) \vee \exists(FG \vee \bar{F}G)]$ [Com.]

$\sim[\exists FG \vee \exists F\bar{G} \vee \exists FG \vee \exists\bar{F}G\}$ LED]

$\sim[\exists FG \vee \exists FG \vee \exists F\bar{G} \vee \exists\bar{F}G]$ [Assoc., Com.]

$\sim[\exists FG \vee \exists F\bar{G} \vee \exists\bar{F}G]$ [Idem.]

$\sim\exists FG \cdot \sim\exists F\bar{G} \cdot \sim\exists\bar{F}G$

2-এতে এ বিস্তার বসিয়ে পাই

$[(\sim\exists FG \cdot \sim\exists F\bar{G} \cdot \sim\exists\bar{F}G) \vee (F\bar{G})x] \supset [\exists FG \cdot (\bar{G} \supset F)x]$ 3.

এবার এর ব্যক্তিবাক্যগুলিতে নিয়ম (৪) প্রয়োগ করে পাই

$[(\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots) \vee (Fx \cdot \bar{G}x)] \supset [\ \ldots (\bar{G}x \supset Fx)]$ 4.

---

* পৃঃ ২২৫-এতে প্রথম পাদটীকা দেখ।

তাহলে রূপান্তরের ফলে পেলাম এ বাক্যটি

$$[(\sim\exists FG \cdot \sim\exists F\bar{G} \cdot \exists\bar{F}G) \vee (Fx \cdot \bar{G}x)] \supset [\exists FG \cdot (\bar{G}x \supset Fx)]$$

উদাহরণ ৩

$$\{Fx \supset (Gy \vee Hy)] \supset \underbrace{\sim\exists\sim(\bar{F}\equiv G\bar{H})}_{\text{I}}\} \supset (\bar{F}x \vee \bar{H}y \vee \underbrace{\exists G}_{\text{II}})$$

এ বাক্যের কেবল I আর II চিহ্নিত অংশের রূপান্তর দরকার ; এর অন্যান্য অংশ অপরিবর্তিত থাকবে। I আর II-কে পৃথকভাবে রূপান্তরিত করা হল।

I $\sim\exists\sim(\bar{F}\equiv G\bar{H})$

$\sim\exists(F\equiv G\bar{H})$ $\quad$ $[\sim(P\equiv Q)$ সম $(\sim P\equiv Q)$ সম $(P\equiv\sim Q)]$

$\sim\exists[FG\bar{H} \vee \bar{F}\sim(G\bar{H})]$

$\sim\exists[FG\bar{H} \vee \bar{F}(\bar{G} \vee H)]$

$\sim\exists[FG\bar{H} \vee \bar{F}\bar{G} \vee \bar{F}H]$

এখন $\bar{F}\bar{G}$-কে বিস্তার করে পাব

$$\bar{F}\bar{G}H \vee \bar{F}\bar{G}\bar{H}$$

আর $\bar{F}H$-কে বিস্তার করে পাব

$$\bar{F}HG \vee \bar{F}H\bar{G}$$

বা $\bar{F}GH \vee \bar{F}\bar{G}H$

$\therefore$ $\bar{F}\bar{G} \vee \bar{F}H$ সম

$$\bar{F}\bar{G}H \vee \bar{F}\bar{G}\bar{H} \vee \bar{F}GH \vee \bar{F}\bar{G}H$$

এ বিস্তারটির প্রথম ও চতুর্থ বিকল্প অভিন্ন। এতে (Assoc. Com ও) Idem প্রয়োগ করে পাই

$$\bar{F}\bar{G}H \vee \bar{F}\bar{G}\bar{H} \vee \bar{F}GH$$

বা $\bar{F}GH \vee \bar{F}\bar{G}H \vee \bar{F}\bar{G}\bar{H}$

তাহলে I-এর পরবর্তী পর্বে পাব

$$\sim\exists(\bar{F}GH \vee \bar{F}\bar{G}H \vee \bar{F}\bar{G}\bar{H})$$

বা $\sim(\exists\bar{F}GH \vee \exists\bar{F}\bar{G}H \vee \exists\bar{F}\bar{G}\bar{H}$

বা $\sim\exists\bar{F}GH \cdot \sim\exists\bar{F}\bar{G}H \cdot \sim\exists\bar{F}\bar{G}\bar{H}$

II $\exists G$

$\exists G$ থেকে পাব : $\exists GF \vee \exists G\bar{F}$

$\exists GF$ „ „ : $\exists GFH \vee \exists GF\bar{H}$

$\exists G\bar{F}$ „ „ : $\exists G\bar{F}H \vee \exists G\bar{F}\bar{H}$

তার মানে $\exists G$-এর পরিপূর্ণ বিস্তার হল

$$\exists GFH \vee \exists GF\bar{H} \vee \exists G\bar{F}H \vee \exists G\bar{F}\bar{H}$$

$$\text{বা} \quad \exists FGH \vee \exists FG\bar{H} \vee \exists \bar{F}GH \vee \exists \bar{F}G\bar{H}$$

তাহলে প্রদত্ত বাক্যটিতে I আর II-এর জায়গায় এদের বিস্তার বসিয়ে পাব ঈপ্সিত রূপান্তর। পাব, এ বাক্যটি

$$\{[Fx \supset (Gy \vee Hy)] \supset (\sim\exists\bar{F}GH \cdot \sim\exists\bar{F}G\bar{H} \cdot \sim\exists\bar{F}\bar{G}\bar{H})\} \supset$$
$$(\bar{F}x \vee \bar{H}y \vee \exists FGH \vee \exists FG\bar{H} \vee \exists\bar{F}GH \vee \exists\bar{F}G\bar{H})$$

১১. মিশ্র বাক্যের বৈধতা ও সত্যসারণী

আমরা এতক্ষণ ধরে যে বাক্য রূপান্তরের কথা বললাম তার লক্ষ্য হল: মিশ্র বাক্যের বৈধতা নির্ণয়েও সত্যসারণীর প্রয়োগ দেখানো। কেবল দেখানোই। তার মানে, তোমরা সত্যসারণী গঠন করে মিশ্র বাক্যের বৈধতা নির্ণয় করবে—এটা আমরা আশা করি না। কেননা এ রকম ক্ষেত্রে সত্যসারণী অত্যন্ত জটিল ও বিশাল আকার ধারণ করে। মিশ্র বাক্যের বেলায়ও সত্যসারণী পদ্ধতি প্রয়োগ করা যে সম্ভব আমরা কেবল তাই দেখাব।

এটা সহজবোধ্য যে, মিশ্র বাক্যের সত্যসারণীর আকর স্তম্ভের শীর্ষে থাকবে প্রাসঙ্গিক মূল-বিধেয়বাক্য ও মূল-ব্যক্তিবাক্য। আমরা জানি, কোনো প্রসঙ্গে মূল বিধেয়বাক্যগুলি—যেমন $\exists FG$, $\exists F\bar{G}$, $\exists\bar{F}G$, $\exists\bar{F}\bar{G}$, অনুবিষম বাক্য (এবং আকরের কোনো সারিতে কেবল 0 থাকতে পারে না)। মূল ব্যক্তিবাক্যগুলি কিন্তু স্বতন্ত্র। যেমন, রাম মোটা (Fx)—এ বাক্যের সত্যতা মিথ্যাত্ব থেকে শ্যাম মোটা (Fy), রাম লোভী (Gx) এ বাক্যগুলির সত্যতা মিথ্যাত্ব সম্বন্ধে কিছু জানা যায় না; আবার Fy, Gx-এর সত্যতা মিথ্যাত্ব থেকে Fx সম্পর্কে কিছু জানা যায় না। স্বতন্ত্র হওয়ার দরুন, মূল ব্যক্তিবাক্য আকরে কোনো জটিলতার সৃষ্টি করে না। p, q ইত্যাদি দিয়ে গঠিত বাক্যের সারণীর আকরের মত, Fx, Gx দিয়ে গঠিত বাক্যের সারণীর আকরেও সব সত্যমূল্যবিন্যাস সম্ভব, যেমন:

Fx	Gx	
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

জটিলতার সৃষ্টি করে এ ব্যাপারটা:

ব্যক্তিবাক্য প্রতিপাদন করে প্রাসঙ্গিক বিধেয়বাক্য,

Fx প্রতিপাদন করে $\exists F$

যেমন, রাম (x) যদি F হয় তাহলে অবশ্যই বলা যাবে: এমন ব্যক্তি আছে যে F। এ

ব্যাপার থেকে বোঝা যাবে, মূল-ব্যক্তিবাক্য আর প্রাসঙ্গিক মূল-বিধেয়-বাক্য স্বতন্ত্র নয়, প্রথমটি দ্বিতীয়টির প্রতিপাদক। কাজেই মিশ্র বাক্যের আকরে সব সত্যমূল্য বিন্যাস সম্ভব নয়। এ কথাটার তাৎপর্য বুঝে নাও। সাধারণ সত্যসারণীর (p, q ইত্যাদি দিয়ে গঠিত বাক্যের সারণীর) আকরে আমরা সত্যমূল্য বসাই যান্ত্রিকভাবে। কিন্তু এ রকম যান্ত্রিক-ভাবে মিশ্র বাক্যের সারণীর আকর গঠন করা যায় না। এক্ষেত্রে আকর গঠন করতে হলে* ঃ দেখতে হবে, মূল্য ব্যক্তিবাক্যের নিচে কী সত্যমূল্য আছে, এবং সে মূল্য অনুসারে প্রাসঙ্গিক মূল বিধেয়বাক্যের মূল্য নির্ণয় করতে হবে। একটা উদাহরণ।

মনে কর, কোনো মিশ্র বাক্য ব-তে আছে দুটো বিধেয় অক্ষর—F, G আর একটা ব্যক্তিনাম —x। ব-এর সত্যসারণীর আকরটি কেমন হবে, দেখা যাক। প্রথমেই বলা যায়, এর কোনো ছত্র এমন হবে না—

Fx	Gx	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
1	1	0			

কেননা $Fx=1$, $Gx=1$ হলে, এমন হতে পারে না যে $\exists FG=0$। যেমন, যদি এমন হত যে রাম মোটা এবং রাম লোভী তাহলে, "মোটা এবং লোভী লোক আছে" এ বাক্য মিথ্যা হতে পারত না। তাহলে আকরের উক্ত ছত্রটি হবে এমন

Fx	Gx	$\exists FG$	ইত্যাদি
1	1	1	

$\exists F\bar{G}$, $\exists \bar{F}G$, $\exists \bar{F}\bar{G}$-এর নিচে কী সত্যমূল্য বসবে ? স্পষ্টতই এদের প্রত্যেকটি সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে। তার মানে, $Fx=1$, $Gx=1$ হলে, সম্ভব নিম্নোক্ত ৮টি সত্যমূল্য বিন্যাস, ৮ ছত্রের একটি সারণী।

Fx	Gx	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0

*লক্ষণীয়, আকরের ভানধারের কথা বলছি না, বলছি আকরের কথা।

এ সত্যমূল্য বিন্যাসগুলি আমরা সংক্ষেপে লিখব এভাবে—

Fx	Gx	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
1	1	1	1/0	1/0	1/0

আমরা কল্পনা করেছি, ব বাক্যটিতে আছে দুটো বিধেয় অক্ষর, আর একটা ব্যক্তিনাম বা ব্যক্তিনাম-গ্রাহক x। এক্ষেত্রে Fx, Gx-এর সম্ভবপর সত্যমূল্য বিন্যাস হল

		Fx	Gx
(১)	$Fx=1, \quad Gx=1$	1	1
(২)	$Fx=1, \quad Gx=0$	1	0
(৩)	$Fx=0, \quad Gx=1$	0	1
(৪)	$Fx=0, \quad Gx=0$	0	0

প্রথম সম্ভাবনার ক্ষেত্রে মূল-বিধেয়-বাক্যগুলি কী সত্যমূল্য নেবে তা বলেছি।

এবার (২): $Fx=1, \quad Gx=0$

এক্ষেত্রে $\exists F\bar{G}$ অবশ্যই সত্য হবে, এর নিচে বসাতে হবে : 1। আর অন্য মূল-বিধেয়-বাক্যগুলি সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে। তার মানে, এক্ষেত্রে সম্ভব নিম্নোক্ত ৮ ছত্রের একটি সারণী।

Fx	Gx	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0

এ সত্যমূল্য বিন্যাসগুলি আমরা সংক্ষেপে লিখব এভাবে—

Fx	Gx	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
1	0	1/0	1	1/0	1/0

এবার (৩) : $Fx=0, \quad Gx=1$

এক্ষেত্রে $\exists \bar{F}G$ অবশ্যই সত্য হবে, আর অন্য মূল-বিধেয়-বাক্যগুলির প্রত্যেকটি সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে। মানে, আকরে এদের প্রত্যেকটির নিচে বসবে 1/0। তার মানে, এক্ষেত্রেও সম্ভব নিম্নোক্ত ৮টি সত্যমূল্য বিন্যাস :

Fx	Gx	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0

এ সত্যমূল্য বিন্যাসগুলি আমরা সংক্ষেপে লিখব এভাবে—

Fx	Gx	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
0	1	1/0	1/0	1	1/0

সবশেষে (৪) : $Fx=0$, $Gx=0$

এক্ষেত্রে $\exists \bar{F}\bar{G}$ অবশ্যই সত্য হবে। আর অন্য মূল-বিধেয়-বাক্যগুলির প্রত্যেকটি সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে ; মানে, আকরে এদের প্রত্যেকটির নিচে বসবে 1/0। তার মানে, এক্ষেত্রে সম্ভব নিম্নোক্ত ৮টি সত্যমূল্য বিন্যাস :

Fx	Gx	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1

এ সত্যমূল্য বিন্যাসগুলি আমরা সংক্ষেপে লিখব এভাবে—

Fx	Gx	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
0	0	1/0	1/0	1/0	1

দেখা গেল, ব-এর মত বাক্যের সত্যসারণীর আকরে যে (৮×৪ বা) ৩২টি সারি থাকার কথা তা সংক্ষেপে এভাবে লেখা যায় :

Fx	Gx	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
1	1	1	1/0	1/0	1/0
1	0	1/0	1	1/0	1/0
0	1	1/0	1/0	1	1/0
0	0	1/0	1/0	1/0	1

ব-এর মত মিশ্র বাক্যের সত্যসারণীর আকর কি করে গঠন করতে হয় তা শিখলাম। এখন আমাদের সত্যসারণী দিয়ে মিশ্রবাক্যের বা যুক্তির বৈধতা পরীক্ষা করতে পারার কথা। উদাহরণ হিসাবে নিচের যুক্তিটি নেওয়া যাক।

$$U(F \supset G),\ Fx \ \therefore\ Gx$$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকটি নিয়ে একে পরপর রূপান্তরিত করে পাই :

$$[U(F \supset G) \cdot Fx] \supset Gx$$

$$[\sim\exists\sim(F \supset G) \cdot Fx] \supset Gx$$

$$(\sim\exists F\bar{G} \cdot Fx) \supset Gx$$

এখন শেষোক্ত বাক্যটির সত্যসারণী গঠন করা যায়। যায় এভাবে—

Fx	Gx	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$	(~	$\exists F\bar{G}$	·	Fx)	⊃	Gx
1	1	1	1/0	1/0	1/0	0/1	1/0	1/0	1	1	1
1	0	1/0	1	1/0	1/0	0	1	0	1	1	0
0	1	1/0	1/0	1	1/0	0/1	1/0	0	0	1	1
0	0	1/0	1/0	1/0	1	0/1	1/0	0	0	1	0
						4	1	5	2	6	3

এ সত্যসারণীর উল্লম্ব রেখার ডান ধারটা কি করে গঠন করা হয়েছে তা নিশ্চয়ই বুঝেছ। তবু নমুনা হিসাবে প্রথম সারিটির গঠন ব্যাখ্যা করা হল।

$(\sim\exists F\bar{G}$	$\cdot\ Fx)$	$\supset Gx$
1/0	1	1

আকর দেখে এ সত্যমূল্যগুলি প্রথমে বসানো হয়েছে।

(i) $\exists F\bar{G}=1$ অথবা (ii) $\exists F\bar{G}=0$; যদি (i) হয় তাহলে $\sim\exists F\bar{G}=0$, যদি (ii) হয় তাহলে $\sim\exists F\bar{G}=1$। সুতরাং $\sim\exists F\bar{G}$-এর মূল্য 0 অথবা 1, মানে 0/1। তাহলে ওপরে $\sim\exists F\bar{G}$-এর নিচে লিখতে হবে 0/1। ধর, তাই লেখা হয়েছে। এখন প্রশ্ন " . "-এর নিচে কী বসবে? $Fx=1$; যদি $\sim\exists F\bar{G}=1$ হয় তাহলে " . "-এর নিচে বসবে 1, আর যদি $\sim\exists F\bar{G}=0$ হয় তাহলে " . "-এর নিচে বসাতে হবে 0। তাহলে " . "-এর নিচে বসাতে হবে : 1/0। এ সত্যমূল্য বসিয়ে পাই :

	$(\sim \exists F\bar{G}$	$\cdot$	$Fx) \supset Gx$
	0/1 1/0	0/1 1	1

এখানে অনুকল্প $Gx=1$, সুতরাং '$\supset$'-এর নিচে বসবে : 1।

এবার আর একটা যুক্তি :

$$U(G \supset F), Fx \therefore Gx$$

অনুষঙ্গী প্রাকল্পিকটি নিয়ে এবং সার্বিক মানক পরিবর্তন করে পাই—

$$(\sim \exists G\bar{F} \cdot Fx) \supset Gx$$

বা $$(\sim \exists \bar{F}G \cdot Fx) \supset Gx$$

এ বাক্যের সত্যসারণী :

Fx	Gx	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$	$(\sim$	$\exists \bar{F}G$	$\cdot$	$Fx)$	$\supset$	Gx
1	1	1	1/0	1/0	1/0	0/1	1/0	0/1	1	1	1
1	0	1/0	1	1/0	1/0	0/1	1/0	0/1	1	1/0	0
0	1	1/0	1/0	1	1/0	0	1	0	0	1	1
0	0	1/0	1/0	1/0	1	0/1	1/0	0	0	1	0
						4	1	5	2	6	3

দ্বিতীয় সারিতে '$\supset$'-এর নিচে 0 লক্ষণীয়। এর থেকে বোঝা যাবে, বাক্যটি মিথ্যা হতে পারে, সুতরাং অবৈধ। সুতরাং যুক্তিটিও অবৈধ।

এতক্ষণ আমরা যে জাতীয় মিশ্র বাক্যের সত্যসারণী গঠন করার কথা বলেছি, বা বস্তুত সত্যসারণী গঠন করেছি, সেগুলিতে দুটো বিধেয় (F, G) আর একটা ব্যক্তিনাম (x)। এবার মনে কর, কোনো বাক্য ভ-তে আছে দুটো বিধেয় F, G, আর দুটো ব্যক্তিনাম : x, y। আমরা এ রকম বাক্যের সত্যসারণী গঠন করার কথা ভাবছি না, কেননা এরকম ক্ষেত্রে সত্যসারণী গঠন করা দুঃসাধ্য ব্যাপার। এ রকম বাক্যের সত্যসারণী যে সম্ভব আমরা কেবল তাই দেখাতে চাই।

যে ভ কল্পনা করছি তার সত্যসারণীর আকরে থাকবে এ চারটি মূল ব্যক্তিবাক্য।

$$Fx, Gx, Fy, Gy$$

আর চারটি মূল-বিধেয়-বাক্য। লক্ষণীয়, কেবল এ চারটি ব্যক্তিবাক্যের বেলাতেই সম্ভব (২^n বা $২^৪$ বা) ১৬টি সত্যমূল্য বিন্যাস। আবার ব্যক্তিবাক্যগুলির এক একটি সত্যমূল্য বিন্যাসে মূল বিধেয় বাক্যগুলি নানান সত্যমূল্য গ্রহণ করতে পারে। মূল ব্যক্তিবাক্যগুলির কোন্ সত্যমূল্য বিন্যাসে কোন্ মূল-বিধেয়-বাক্য কী সত্যমূল্য নেবে তার দু একটা নমুনা নেওয়া যাক। ধর,

$$Fx=1, Gx=1, Fy=1, Gy=0$$

এখন, $Fx=1, Gx=1 \therefore x$ হল $FG \therefore \exists FG=1$, আবার $Fy=1, Gy=0$

∴ y' হল $F\bar{G}$ ∴ $\exists F\bar{G}=1$। দেখা গেল, উক্ত বিন্যাসে $\exists FG$ আর $\exists F\bar{G}$ অবশ্যই সত্য ; অন্য মূল-বিধেয়-বাক্যগুলি সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে। তার মানে, $Fx=1$, $Gx=1$, $Fy=1$, $Gy=0$ হলে, সম্ভব নিম্নোক্ত ৪টি সত্যমূল্য বিন্যাস (মূল বিধেয় বাক্যের সত্যমূল্য বিন্যাস) :

Fx	Gx	Fy	Gy	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1	0	0

বা সংক্ষেপে

Fx	Gx	Fy	Gy	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
1	1	1	0	1	1	1/0	1/0

আবার, ধর

$$Fx=0,\ Gx=1,\ Fy=0,\ Gy=1$$

এর থেকে বোঝা যায় : x, y —উভয়ই $\bar{F}$, আবার x, y —উভয়ই G ∴ $\exists \bar{F}G=1$। এখানে কেবল একটি মূল বিধেয় বাক্যের সত্যমূল্য জানা গেল ; বাকি ৩টির প্রত্যেকটি সত্যও হতে পারে, মিথ্যাও হতে পারে। তার মানে, এক্ষেত্রে সম্ভব নিম্নোক্ত ৮টি সত্যমূল্য বিন্যাস :

Fx	Gx	Fy	Gy	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0

বলা বাহুল্য, এ ৮টি বিন্যাস সংক্ষেপে এভাবে দেখাতে পারি—

Fx	Gx	Fy	Gy	$\exists FG$	$\exists F\bar{G}$	$\exists \bar{F}G$	$\exists \bar{F}\bar{G}$
0	1	0	1	1/0	1/0	1	1/0

মূল ব্যক্তিবাক্যগুলির বাকি ১৪টি সত্যমূল্য বিন্যাসের কোন্‌টির বেলায় কোন্ মূল বিধেয় বাক্য কী মূল্য গ্রহণ করবে তা নিজেরাই ঠিক করতে পারবে। যে বিন্যাসগুলি পাওয়া যাবে তার সবগুলি সংক্ষেপে ব্যক্ত করলে পাবে : ১৬টি সারি, ৮টি স্তম্ভ—মূল ব্যক্তিবাক্যের ৪টি, মূল বিধেয় বাক্যের ৪টি স্তম্ভ। এটা হবে ভ-এর মত বাক্যের সত্যসারণীর আকর।

১২. একটা বৈধতা নিয়মের যাথার্থ্য

পৃঃ ২২৬-এতে রূপান্তর নিয়ম (৬) দেখ। ঐ প্রসঙ্গে আমরা বলেছি, পরে এ নিয়মটির যাথার্থ্য দেখানো হবে। ঐ নিয়মের যাথার্থ্য দেখানো মানে আসলে একটা বৈধতা নিয়মের যাথার্থ্য প্রতিপন্ন করা। কেননা, আমাদের বক্তব্য ছিল : ও নিয়ম অনুসারে কোনো বাক্য ব রূপান্তর করে যে বাক্য ভ পাওয়া যায় তা (ভ) বৈধ হলে ব-ও বৈধ। যে বৈধতা-নিয়মের যাথার্থ্য দেখানোর কাজ আমরা হাতে নিচ্ছি সে নিয়মটি কী তা ভাল করে বুঝে নাও।

ধর,

ব = এমন বৈকল্পিক বাক্য যার কোনো কোনো বিকল্প হল ব্যক্তিবাক্য—যে ব্যক্তিবাক্যগুলির ব্যক্তিনাম (বা ব্যক্তিগ্রাহক) ভিন্ন ভিন্ন

ভ = ব-এর অন্তর্ভুক্ত ব্যক্তিবাক্যগুলির জায়গায় অনুষঙ্গী সার্বিক মানকিত বাক্য বসালে যে বাক্য পাওয়া যায় সে বাক্য

যখন উক্ত রূপান্তর নিয়ম ও সে প্রসঙ্গে বৈধতা নির্ণয়ের কথা বলেছি তখন আমরা ধরে নিয়েছি

ব বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে ভ বৈধ।

আমরা যে ব কল্পনা করছি তার দু অংশ এক অংশ হল মানকিত-বাক্য-দিয়ে-গঠিত বিকল্প, আর এক অংশ ব্যক্তিবাক্য-দিয়ে-গঠিত বিকল্প। ধর,

Y = একটি মানকিত বাক্য বা এমন বৈকল্পিক বাক্য যার বিকল্পগুলি মানকিত বাক্য,

ক, খ ইত্যাদি = এক একটি বিধেয় —একাক্ষর বিধেয় বা অনেকাক্ষর বিধেয়

x, y ইত্যাদি = এক একটি ব্যক্তিনাম বা ব্যক্তিগ্রাহক।

তাহলে আমরা যা ধরে নিয়েছিলাম এবং এখন যা প্রমাণ করতে যাচ্ছি তা একটা উপপাদ্য হিসাবে উত্থাপন করতে পারি।

উপপাদ্য

Y v কx v খy v··· [ব]

বৈধ হবে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে

Y v Uক v Uখ v····· [ভ]

বৈধ।

উপপাদ্যটি প্রমাণ করতে আমরা যে যৌক্তিক নিয়মগুলির সাহায্য নেব প্রথমে সেগুলির সঙ্গে তোমাদের পরিচয় করিয়ে দিই।

(১) $[(p \supset q) \cdot (r \supset s)] \supset [(p \vee r) \supset (q \vee s)]$—এ বাক্য বৈধ

এ কথার মানে

যদি এমন হয় যে $p \supset q$ সত্য এবং $r \supset s$ সত্য তাহলে

$(p \vee r) \supset (q \vee s)$ অবশ্যই সত্য

∴ যদি এমন হয় যে $p \supset q$ স্বতসত্য (বা বৈধ) এবং $r \supset s$ স্বতসত্য
তাহলে $(p \vee r) \supset (q \vee s)$ স্বতসত্য

এখন, ক ⊃ খ স্বতসত্য বা বৈধ—এ কথার মানে ক প্রতিপাদন করে খ-কে, সুতরাং বলতে পারি

যদি এমন হয় যে p প্রতিপাদন করে q-কে, এবং
r প্রতিপাদন করে s-কে
তাহলে $p \vee r$ প্রতিপাদন করবে $q \vee s$-কে [সূত্র ১]

(২) $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$—এ বাক্য বৈধ

মানে

$q \supset r$ প্রতিপাদন করে এ বাক্য : $(p \vee q) \supset (p \vee r)$

কথাটা এভাবেও বলা যায়

যদি এমন হয় যে q r-কে প্রতিপাদন করে তাহলে
$p \vee q$ প্রতিপাদন করবে $p \vee r$-কে [সূত্র ২]

(৩) Uক ⊃ কx —এ বাক্য বৈধ

মানে

Uক প্রতিপাদন করে কx-কে [সূত্র ৩]

সবকিছুই যদি ক হয় তাহলে অবশ্যই কোনো বিশেষ ব্যক্তি x-ও হবে ক।

প্রমাণ

সূত্র ৩ অনুসারে

Uক প্রতিপাদন করে কx-কে
Uখ প্রতিপাদন করে খy-কে
ইত্যাদি ইত্যাদি

সূত্র ১ অনুসারে

Uক v Uখ v……প্রতিপাদন করে কx v খy v……কে

আর সূত্র ২ অনুসারে

Y v Uক v Uখ v……প্রতিপাদন করে Y v কx v খy v……কে

সুতরাং

যদি এমন হয় যে Y v Uক v Uখ v……[ভ] বৈধ
তাহলে Y v কx v খy v…… [ব] বৈধ হবে

[প্রমাণের এক অংশ শেষ হল। এখন আমাদের দেখাতে হবে : যদি ভ অবৈধ হয় তাহলে ব-ও অবৈধ।]

ধর,

Y v Uক v Uখ……অবৈধ

তাহলে, এমন সত্যমূল্য আছে যা আরোপ করলে এ বাক্যের প্রত্যেকটি বিকল্প মিথ্যা হবে—মিথ্যা হবে Y, মিথ্যা হবে Uক, মিথ্যা হবে Uখ ইত্যাদি। ধর, এ সত্যমূল্য বসিয়ে বিকল্পগুলির মিথ্যাত্ব দেখলাম। এখন

Uক মিথ্যা, সুতরাং এমন ব্যক্তি আছে যাতে ক নেই। আর এমন হতে পারে সে ব্যক্তি হল x। সুতরাং এমন হতে পারে, কx মিথ্যা।

Uখ মিথ্যা, সুতরাং এমন ব্যক্তি আছে যাতে খ নেই। আর এমন হতে পারে সে ব্যক্তিটি হল y। সুতরাং এমন হতে পারে, খy মিথ্যা।

x, y স্বতন্ত্র ব্যক্তি, আর মূল ব্যক্তিবাক্য কx, খy এসবও স্বতন্ত্র বাক্য। সুতরাং কx আর খy যদি স্বতন্ত্রভাবে মিথ্যা হতে পারে, তাহলে এ বাক্যগুলি যুগপৎ মিথ্যা হতে পারে।

দেখা গেল, যদি এমন সত্যমূল্য পাওয়া যায় যা বসালে ভ মিথ্যা হবে, তাহলে এমন সত্যমূল্য পাওয়া সম্ভব যা বসালে ব-ও মিথ্যা হবে। তার মানে, যদি ভ অবৈধ হয় তাহলে ব-ও অবৈধ। আমরা দেখলাম

> যদি এমন হয় যে ভ বৈধ তাহলে ব-ও বৈধ, এবং যদি এমন হয় যে ভ অবৈধ তাহলে ব-ও অবৈধ।

তার মানে

Y v কx v খy v……

বৈধ হতে পারে যদি এবং কেবল যদি এমন হয় যে

Y v Uক v Uখ v……

বৈধ।

Y v কx v খy v……

আকারের বাক্যের বৈধতা সংক্রান্ত নিয়মের যাথার্থ্য দেখানো হল। আমরা এমন বাক্যের সাক্ষাৎ পেতে পারি যাতে কেবল একটি বিকল্প হল ব্যক্তিবাক্য, মানে

Y v কx (i)

আকারের বাক্য। আবাব, এমন বাক্যের সাক্ষাৎ পেতে পারি যে বাক্যের কোনো বিকল্পই মানকিত বাক্য নয়,

কx v খy v…… (ii)

আকারের বাক্য। দেখবে, (i), (ii)-এর বেলাতেও উক্ত প্রমাণ খাটে।

অনুশীলনী

নিম্নোক্ত আকারের যুক্তি গঠন কর, এবং সত্ত্ব প্রাকল্পিক ও সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি প্রয়োগ করে এদের বৈধতা বিচার কর।

প্রথম সংস্থানে *Aaa, Eae, Aee*
দ্বিতীয় সংস্থানে *Eae, Aee, Aaa*
তৃতীয় সংস্থানে *aaI, eaO, aeE*

১৬

বিধেয় বাক্যের তন্ত্রীকরণ

১. ভূমিকা

এ অধ্যায়ের ভূমিকা হিসাবে সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান : বাক্য কলন-এর অধ্যায় ২০ যত্ন করে পড়ে নিতে হবে। ঐ অধ্যায়ে "PM"-এর ব্যবহার প্রসঙ্গে যা বলা হয়েছিল তার পুনরুক্তি করছি : মনে রাখতে হবে, যাকে PM তন্ত্র বলা হচ্ছে তা আসলে বিশাল PM তন্ত্রের একটা খণ্ডিত অংশ। আসলে তা PM-এর অন্তর্ভুক্ত বাক্যকলনতন্ত্র। এখন আমাদের লক্ষ্য বৈধ বিধেয় বাক্যের অবরোহতন্ত্রীকরণ—বিধেয় কলনের তন্ত্রীকরণ, সংক্ষেপে বিধেয় তন্ত্র রচনা। বাক্যতন্ত্র ও বিধেয়তন্ত্র কিন্তু স্বতন্ত্র নয়। বলতে পারতাম, এ দুটি তন্ত্র হল বিশাল PM তন্ত্রের দুটি খণ্ড—তন্ত্রখণ্ড। বলতে পারতাম, অধ্যায় ২০-এতে রচিত তন্ত্র হল PM বাক্যতন্ত্র আর এ অধ্যায়ের বিষয় হল PM বিধেয় তন্ত্র। তা কিন্তু বলছি না। কেন, তা বলতে বাধা কোথায় ?

এ অধ্যায়ে যে বিধেয় তন্ত্র রচনা করা হবে, PM তন্ত্র সদৃশ হলেও, তা ঠিক PM-এর বিধেয় তন্ত্র নয়। দু একটা পার্থক্যের কথা বলি।

$$U(F \supset G) \supset (UF \supset UG)$$
$$UF \supset \exists G$$

এগুলি আমাদের গঠনীয় তন্ত্রের মৌল বাক্য, কিন্তু PM বিধেয় কলনে যথাক্রমে *9.21 আর *10.25 সংখ্যক উপপাদ্য।

এখানে একটা প্রশ্ন ওঠে। বাক্যতন্ত্রের বেলায় আমরা পুঙ্খানুপুঙ্খরূপে PM অনুসরণ করেছি। কিন্তু বিধেয় বাক্যের তন্ত্রীকরণ করতে গিয়ে PM অনুসরণ করব না কেন ? আমরা আগেই বলেছি PM অত্যন্ত দুর্বোধ্য বই। এর বিধেয় তন্ত্রকে আমরা অনেক সরল করে উত্থাপন করার চেষ্টা করেছি। ফলে ঐ তন্ত্রে কিছু অদল বদল করতে হয়েছে। PM বিধেয় তন্ত্রে একসঙ্গে মেশানো আছে এ তিন রকম বাক্য :

(১) মানকিত বাক্য বা মানকিত বাক্য দিয়ে গঠিত সত্যাপেক্ষ বাক্য, যথা :
$U(F \vee \sim F)$, $[U(F \supset G) \cdot U(G \supset H)] \supset U(F \supset H)$

(২) মিশ্র বাক্য—যে বাক্যের কোনো অঙ্গ মানকিত আর কোনো অঙ্গ ব্যক্তিবাক্য, যথা :
$[U(G \supset H) \cdot Gx] \supset Hx$, $(Hx \cdot Fx) \supset \exists(F \cdot H)$

(৩) মিশ্র বাক্য—যে বাক্যের কোনো অঙ্গ মানকিত, কোনো অঙ্গ বাক্য কলনের p, q ইত্যাদি, যথা :

$q \supset (UF \vee q)$, $[p \vee (q \vee UF)] \supset [q \vee (p \vee UF)]$

আমরা যে বিধেয় তন্ত্র পরিকল্পনা করেছি তাতে উক্ত তৃতীয় প্রকার বাক্যের স্থান নেই। আর প্রথম ও দ্বিতীয় প্রকারের বাক্যকে তন্ত্রবদ্ধ করেছি দু ভাগে : প্রথম ভাগে কেবল প্রথম প্রকারের বাক্যের তন্ত্রীকরণ, আর দ্বিতীয় ভাগে দ্বিতীয় প্রকারের বাক্যের তন্ত্রীকরণ। আমাদের পরিকল্পিত বিধেয় তন্ত্রের প্রথম ভাগকে বিধেয় তন্ত্র ১, আর দ্বিতীয় ভাগকে বিধেয় তন্ত্র ২, বলে উল্লেখ করতে পারি। PM-এর বিধেয় তন্ত্রকে কি করে আর একটু সহজবোধ্য করার চেষ্টা করা হয়েছে তাই বলা হল।

আগেই বলা হয়েছে, PM বাক্যতন্ত্র আর আমাদের পরিকল্পিত বিধেয়তন্ত্র স্বতন্ত্র নয়। দেখা যাবে, বিধেয় তন্ত্রটি PM ব্যক্যতন্ত্রেরই পরিবর্ধিত রূপ। তার মানে, PM বাক্যতন্ত্রখণ্ড পরিকল্পিত বিধেয় তন্ত্রের অন্তর্ভুক্ত। তার মানে, যে মৌল বাক্য, রূপান্তর বিধি ইত্যাদির সাহায্যে যে কোনো বৈধ বিধেয় বাক্য অবরোহণ করা যাবে, ঠিক তার থেকেই PM-বাক্য-তন্ত্রভুক্ত সব বাক্য অবরোহণ করা যাবে। বিধেয় তন্ত্রের মৌল বাক্য, রূপান্তর-বিধি ইত্যাদির সঙ্গে PM তন্ত্রের মৌল বাক্য, রূপান্তরবিধি ইত্যাদি তুলনা কর ; তাহলেই এ উক্তির যাথার্থ্য বুঝতে পারবে। কেননা, দেখতে পাবে, PM বাক্যতন্ত্রের মৌল বাক্য, রূপান্তর বিধি ইত্যাদি বিধেয় তন্ত্রের মৌল বাক্য, রূপান্তর বিধির অন্তর্ভুক্ত।

২. বর্ধিত PM-তন্ত্র

ওপরে যা বলা হল তার থেকে বোঝা যাবে, আমাদের পরিকল্পিত বিধেয় তন্ত্রকে (পরি)বর্ধিত PM তন্ত্র নামে চিহ্নিত করতে পারি। আরও বোঝা যাবে—এ বর্ধিত PM তন্ত্রের দু ভাগ :

বর্ধিত PM তন্ত্র ১ : যার অন্তর্ভুক্ত—PM বাক্যতন্ত্রের বাক্য ও মানকিত বাক্য দিয়ে গঠিত বাক্য ;

বর্ধিত PM তন্ত্র ২ : যার অন্তর্ভুক্ত—PM বাক্যতন্ত্রের বাক্য আর পৃঃ ২৪৯-এতে উল্লেখ-করা প্রথম প্রকারের মিশ্র বাক্য।

মৌল প্রতীক*

$p, q, r, s, \ldots$ U $x, y, z, \ldots$

$\sim, \vee$ $F, G, H, \ldots$

$(,), [,], \{, \}$

অধিতান্ত্রিক প্রতীক

ব, ভ,··· [যে কোনো বাক্য বোঝাতে]

ক, খ,··· [বাক্য কলনের বাক্যের অনুষঙ্গী বিধেয় বা বিধেয় বিন্যাস বোঝাতে]

ক', খ',··· [বিধেয়ের অনুষঙ্গী বাক্য বা বাক্যবিন্যাস বোঝাতে]

গঠনের নিয়ম*

যেকোনো নিঃসঙ্গ বাক্যগ্রাহক সুবা বলে গণ্য।
যদি 'ব' সুবা হয় তাহলে ~(ব) সুবা বলে গণ্য।
যদি 'ব' সুবা হয় এবং 'ভ' সুবা হয় তাহলে (ব) v (ভ) সুবা বলে গণ্য ॥

যেকোনো নিঃসঙ্গ বিধেয়গ্রাহক সুবা বলে গণ্য।
যদি 'ক' সুবা হয় তাহলে ~(ক) সুবা বলে গণ্য।
যদি 'ক' সুবা হয় এবং 'খ' সুবা হয় তাহলে (ক) v (খ) সুবা বলে গণ্য ॥

সংজ্ঞা*

ব ⊃ ভ ·=· ~ব v ভ Df [Def ⊃]
ব · ভ ·=· ~(~ব v ~ভ) Df [Def ·]
ব ≡ ভ ·=· (ব ⊃ ভ) · (ভ ⊃ ব) Df [Def ≡]

ক ⊃ খ ·=· ~ক v খ Df [Def ⊃]
ক · খ ·=· ~(~ক v ~খ) Df [Def ·]
ক ≡ খ ·=· (ক ⊃ খ) · (খ ⊃ ক) Df [Def ≡]
∃ক ·=· ~U~ ক Df [Def ∃]

মৌল বাক্য*

A1 $(p \vee p) \supset p$ [Taut]
A2 $q \supset (p \vee q)$ [Add]
A3 $(p \vee q) \supset (q \vee p)$ [Perm]
A4 $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$ [Sum]**

A5 $U(F \supset G) \supset (UF \supset UG)$
A6 $UF \supset \exists F$
A7 $(F \cdot G)x \equiv (Fx \cdot Gx)$
A8 $Fx \supset \exists F$

রূপান্তরবিধি

নিবেশনবিধি (১)

যদি 'ব' তন্ত্রবাক্য হয়

$P_1, P_2, \ldots P_n$ 'ব'-এর অন্তর্ভুক্ত বাক্যগ্রাহক হয়
ভ১, ভ২, …ভ$_n$ বাক্যকলনের অথবা বিধেয় কলনের সুবা হয়

---

* সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান : বাক্যকলন, পৃঃ ৪৬৪ দ্রষ্টব্য।

** PM-এর পঞ্চম 'মৌল' বাক্যটি বাদ দেওয়া হল। কেননা, দেখানো যায়, এটি স্বতন্ত্র বাক্য নয়, PM-এর একটি উপপাদ্য।

তাহলে

$$\left[ব \frac{ভ_১}{P_1}, \frac{ভ_২}{P_2}, \ldots \frac{ভ_n}{P_n} \right]$$-ও তন্ত্রবাক্য।

সর্বশেষ ছত্রের বাক্সবন্ধনীর মধ্যে যে প্রতীক তার মানে বিশদভাবে বলা হয়েছে সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান : বাক্যকলন, অধ্যায় ২০, বিভাগ ২-এতে।

নিবেশনবিধি (২)

যদি 'ব' তন্ত্রবাক্য হয়

F_1. F_2, … F_n 'ব'-এর অন্তর্ভুক্ত বিধেয় গ্রাহক হয়

ক$_১$, ক$_২$, … ক$_n$ বিধেয় কলনের সুবা হয়

তাহলে

$$\left[ব \frac{ক_১}{F_1}, \frac{ক_২}{F_2}, \ldots \frac{ক_n}{F_n} \right]$$-ও তন্ত্রবাক্য।

নিবেশনবিধি দুটির প্রয়োগের উদাহরণ।

(১)-এর উদাহরণ

$$\text{[Comp.]}\ (p \supset q) \supset \{(p \supset r) \supset [p \supset (q \cdot r)]\} \qquad (1)\ [*3.43]$$

$$\left[(1)\ \frac{U(F \cdot G)}{p}, \frac{UF}{q}, \frac{UG}{r} \right] [U(F \cdot G) \supset UF] \supset \{[U(F \cdot G) \supset UG] \supset [U(F \cdot G) \supset (UF \cdot UG)]\} \qquad (2)$$

এতে বলা হল, (1) থেকে (2) নিষ্কাশন করা হয়েছে নিবেশনবিধি অনুসারে। (1)-এতে কোন্ বাক্যের জায়গায় কোন্ বাক্য নিবেশন করা হল তা বলা হয়েছে (2)-এর বামধারের বাক্সবন্ধনীর মধ্যে। (1)-এর বামের বাক্সবন্ধীর মধ্যে আছে (1)-সংখ্যক তন্ত্রবাক্যটির সংক্ষিপ্ত নাম (এর পুরো নাম Composition-এর সূত্র)। আর এর ডানধারের বাক্সবন্ধনীর মধ্যে আছে—PM-এতে এ তন্ত্রবাক্যটি যে সংখ্যার দ্বারা চিহ্নিত সে সংখ্যা। বলা বাহুল্য এ অবরোহে আরও বলা হয়েছে : (1) তন্ত্রবাক্য, সুতরাং (2)-ও তন্ত্রবাক্য।

(২)-এর উদাহরণ

$$\text{[LED]} \qquad \exists(F \vee G) \equiv (\exists F \vee \exists G) \qquad (1)$$

$$\left[(1)\ \frac{F \cdot G}{F}, \frac{F \cdot H}{G} \right] \exists[(F \cdot G) \vee (F \cdot H)] \equiv [\exists(F \cdot G) \vee \exists(F \cdot H)] \quad (2)$$

মানকিতকরণের নিয়ম

Rule of Quantifier Introduction (QI)

যদি ক′ (PM-)তন্ত্রবাক্য হয়
তাহলে Uক তন্ত্রবাক্য।

এখানে ক′ হল এমন তন্ত্রবাক্য যা গঠিত বাক্যগ্রাহক p, q ইত্যাদি দিয়ে। আর ক হল এমন বিধেয়-গ্রাহক-দিয়ে-গঠিত-বাক্য যা ক′-এর সঙ্গে অভিন্নগঠন।

উদাহরণ

উপপাদ্য $U(F \vee \sim F)$

প্রমাণ

[Excluded Middle] $p \vee \sim p$ (1) [*2.11]
[(1), QI] $U(F \vee \sim F)$

এখানে ক′ $= p \vee \sim p$, ক $= F \vee \sim F$, Uক $= U(F \vee \sim F)$

বিচ্ছেদনবিধি (Inf)*

যদি ব ⊃ ভ তন্ত্রবাক্য হয়
ব তন্ত্রবাক্য হয়
তাহলে ভ-ও তন্ত্রবাক্য।

৩. উপবিধি

সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান : বাক্যকলন, অধ্যায় ২০-এতে আমরা এ উপবিধিগুলি প্রমাণ করেছি :

HS বিধি, Adj বিধি, Int বিধি

এ উপবিধিগুলি আমরা বিধেয় বাক্যের তন্ত্রীকরণ করতে গিয়ে প্রয়োগ করব।

এখানে আরও একটা উপবিধি উত্থাপন করব। এ বিধিটি একটি মানকসঞ্চালন বিধি। এর নাম DQ1। এখানে "DQ" হল "Distribution of Quantifier"-এর সংক্ষেপক। আর "1" ব্যবহার করছি এজন্য : এ বিধিটি ছাড়াও পরে আরও দুটো DQ বিধি (DQ2, DQ3) উত্থাপন করা হবে (পৃঃ ২৬২ দ্রষ্টব্য)।

মানকসঞ্চালন বিধি

Rule of Distribution of Quantifier (DQ)

DQ1

যদি ক′ ⊃ খ′ (PM-)তন্ত্রবাক্য হয়
তাহলে Uক ⊃ Uখ-ও তন্ত্রবাক্য

---

* **Rule of Detachment,** বা **Rule of Inference** [সংক্ষেপে **Inf**]

ধর, $ক' \supset খ'$ PM-তন্ত্রবাক্য। তাহলে QI অনুসারে $U(ক \supset খ)$-ও তন্ত্রবাক্য। দেখ, এ বাক্য আর A5 থেকে পাওয়া যায় এ সত্য : $Uক \supset Uখ$-ও তন্ত্রবাক্য। এ নিষ্কাশনটা এভাবে দেখানো যায় :

[প্রকল্প]	$ক' \supset খ'$	(1)
[(1), QI]	$U(ক \supset খ)$	(2)
$\left[A5 \frac{ক}{F}, \frac{খ}{G}\right]$	$U(ক \supset খ) \supset (Uক \supset Uখ)$	(3)
[(3), (2) Inf]	$Uক \supset Uখ$	

Int (Interchange)

বিধি

Int বিধি সম্পর্কে দু একটা কথা বলার আছে। PM বাক্যতন্ত্রে আমরা Int বিধি প্রমাণ করেছি, কিন্তু প্রয়োগ করি নি। বিধেয়তন্ত্রে কিন্তু এ বিধিটি প্রয়োগ করব—এ কথা আগেই বলেছি। বিধিটি এভাবে ব্যক্ত করতে পারি।

যদি এমন হয় যে

প তন্ত্রবাক্য

অ হল প-এর অঙ্গবাক্য

$অ \equiv স$ তন্ত্রবাক্য

তাহলে

$প\left[\frac{স}{অ}\right]$-ও তন্ত্রবাক্য

উদাহরণ

ধর, নিম্নোক্ত বাক্য দুটি PM-তন্ত্রবাক্য :

$$(\sim p \supset \sim\sim p) \supset p \qquad (1)$$
$$p \equiv \sim\sim p \qquad (2)$$

তাহলে, এর থেকে আমরা পেতে পারি

[(1), (2) Int] $\quad (\sim p \supset p) \supset p$

এখানে

$$প = (\sim p \supset \sim\sim p) \supset \sim\sim p$$
$$অ = \sim\sim p, \quad স = p$$
$$অ \equiv স = \sim\sim p \equiv p$$
$$প\left[\frac{স}{অ}\right] = (\sim p \supset \sim\sim p) \supset p\left[\frac{p}{\sim\sim p}\right]$$
$$= (\sim p \supset p) \supset p$$

বিশেষ করে বিধেয়তন্ত্রের কথা মনে রেখে Int বিধিটি এভাবে ব্যক্ত করা হল :

যদি এমন হয় যে

প তন্ত্রবাক্য

বিধেয়বাক্য ক প-এর অঙ্গবাক্য

অ ≡ স (PM বাক্যকলনের*) তন্ত্রবাক্য

অ ≡ স-তে বিধেয়বাক্য নিবেশন করে পাওয়া যায়

ক ≡ খ

তাহলে

প[খ/ক]-ও তন্ত্রবাক্য।

উদাহরণ

ধর, নিম্নোক্ত বাক্য দুটি তন্ত্রবাক্য (প্রথমটি বিধেয় তন্ত্রবাক্য, দ্বিতীয়টি PM তন্ত্রবাক্য):

$$\mathrm{U} \sim\sim F \equiv \sim\exists\sim F \qquad (1)$$

$$p \equiv \sim\sim p \qquad (2)$$

তাহলে এর থেকে আমরা পেতে পারি

$$\left[(2)\ \frac{F}{p}\right]\ F \equiv \sim\sim F \qquad (3)$$

$$[(1), (3)\ \mathrm{Int}]\ \mathrm{U}F \equiv \sim\exists\sim F$$

এখানে

প = $\mathrm{U} \sim\sim F \equiv \sim\exists \sim F$

অ = $\sim\sim p$, স = p

অ ≡ স = $\sim\sim p \equiv p$

ক = $\sim\sim F$, খ = F

ক ≡ খ = $\sim\sim F \equiv F$

Int বিধিতে কী অনুমোদন করা হয় তা সোজা কথায় অনেক সংক্ষেপে এভাবে বলতে পারি :

> যে কোনো বাক্যের যে কোনো অঙ্গের জায়গায় এর সমার্থক নিবেশন করতে পার।

Int বিধি প্রয়োগ করলে কিভাবে 'ভাষ্য' লিখতে হয়, আমরা তা দেখেছি। তবে এ 'ভাষ্য' আরও অনেক সংক্ষেপে লেখা যায়। কিরকম সংক্ষেপ সম্ভব তা নিচের বিভাগটি পড়লে বোঝা যাবে। এতে সাধারণভাবে প্রমাণ সংক্ষেপকরণের কথা বলা হয়েছে। এবং Int প্রয়োগ করলে ভাষ্য কিভাবে সংক্ষেপ করা যায় তাও প্রসঙ্গত বলা হয়েছে।

সংক্ষেপকরণ

নিম্নোক্ত প্রমাণটি লক্ষ কর।

---

* মানে 'অ ≡ স' গঠিত p, q ইত্যাদি দিয়ে

উপপাদ্য $UF \equiv \sim \exists \sim F$

প্রমাণ

[Id]	$p \equiv p$	(1) [*4.2]
$\left[(1)\frac{\sim\exists\sim F}{p}\right]$	$\sim\exists\sim F \equiv \sim\exists\sim F$	(2)
[(2) Def $\exists$]	$\sim\sim U\sim\sim F \equiv \sim\exists\sim F$	(3)
[DN]	$p \equiv \sim\sim p$	(4)
$\left[(4)\frac{F}{p}\right]$	$F \equiv \sim\sim F$	(5)
[(3), (5) Int]	$\sim\sim UF \equiv \sim\exists\sim F$	(6)
$\left[(4)\frac{UF}{p}\right]$	$UF \equiv \sim\sim UF$	(7)
[(6), (7), Int]	$UF \equiv \sim\exists\sim F$	

এ রকম প্রমাণ অনেক সংক্ষেপে লেখা যায়। কিভাবে সংক্ষেপকরণ করা যায়, দেখ। ধর, আমাদেব PM বাক্যতন্ত্রের এমন তন্ত্রবাক্য ব্যবহার করতে হবে যা বিশেষ নামে বা সংখ্যায় চিহ্নিত, যেমন Id, DN। এ রকম ক্ষেত্রে তন্ত্রবাক্যটি আলাদা করে লেখার দরকার নেই। যথা, উক্ত প্রমাণের প্রথম দুটি ছত্রের বদলে লেখা যেত :

$$\left[\text{Id}\,\frac{\sim\exists\sim F}{p}\right] \quad \sim\exists\sim F \equiv \sim\exists\sim F$$

উক্ত প্রমাণে আমরা DN ও Int প্রয়োগের সুযোগ নিয়েছি। সেজন্য DN নামক তন্ত্র বাক্য আলাদা করে দেখিয়েছি, তাতে একরূপ নিবেশন করেছি (p-এতে F) এবং তারপর বলেছি : অমুকের জায়গায় তমুক সমবেশন করা হল। কিন্তু ওপরের (4), (5), (6)-এর বদলে লেখা যেত :

$$\left[\text{অমুক বাক্য, DN}\,\frac{F}{p}\text{, Int}\right] \sim\sim UF \equiv \sim\exists\sim F$$

আবার (4), (6), (7)-এর বদলেও লেখা যেত

$$[\quad \text{ঐ} \quad]\; UF \equiv \sim\exists\sim F$$

তার মানে, উক্ত প্রমাণটি সংক্ষেপে লেখা যেত এভাবে .

$\left[\text{Id}\,\frac{\sim\exists\sim F}{p}\right]$	$\sim\exists\sim F \equiv \sim\exists\sim F$	(1)
[(1) Def $\exists$]	$\sim\sim U\sim\sim F \equiv \sim\exists\sim F$	(2)
$\left[(2), \text{DN}\frac{F}{p}, \text{Int}\right]$	$\sim\sim UF \equiv \sim\exists\sim F$	(3)
$\left[(3), \text{DN}\frac{UF}{p}, \text{Int}\right]$	$UF \equiv \sim\exists\sim F$	

বৈধতার আকারসর্বস্ব প্রমাণে আমরা পদে পদে সমবেশন করেছি, Int বিধি প্রয়োগ করেছি। ও রকম ক্ষেত্রে কিভাবে ভাষ্য লিখেছি তা স্মরণ করতে চাই। তার আগে একটা কথা। ধর, বৈধতার আকারসর্বস্ব প্রমাণে এক পর্যায়ে পেলাম

$$n \cdot Ca \vee \sim\sim Da$$

এখানে DN অনুসারে $\sim\sim D$-এর জায়গায় Da বসিয়ে একটি বাক্য নিষ্কাশন করতে চাই। উপরোক্ত উপপাদ্যের প্রমাণে Int প্রয়োগ করে যেভাবে ভাষ্য লিখেছি সেভাবে ভাষ্য যোগ করতে গেলে বলতে হয়

$$n+1 \cdot p \equiv \sim\sim p \qquad \text{DN}$$
$$n+2 \cdot Da \equiv \sim\sim Da \qquad n+1, \frac{Da}{p}$$
$$n+3 \cdot Ca \vee Da \qquad n, n+2, \text{Int}$$

বা

$$n \cdot Ca \vee \sim\sim Da$$
$$n' \cdot Ca \vee Da \qquad n, \text{DN}\frac{Da}{p}$$

কিন্তু বস্তুত আমরা এরকম অবরোহ লিখে আসছি এভাবে

$$n \cdot Ca \vee \sim\sim Da \qquad (1)$$
$$n'' \cdot Ca \vee Da \qquad n, \text{DN}$$

বিধেয় তন্ত্রের উপপাদ্য প্রমাণেও আমরা এভাবে সংক্ষেপকরণ করতে ও ভাষ্য লিখতে পারি। তাহলে উক্ত উপপাদ্যের প্রমাণটি লেখা যায় এভাবে :

$$\left[\text{Id } \frac{\sim\exists\sim F}{p}\right] \qquad \sim\exists\sim F \equiv \sim\exists\sim F \qquad (1)$$
$$[\,(1)\ \text{Def } \exists\,] \qquad \sim\sim U\sim\sim F \equiv \sim\exists\sim F \ (2)$$
$$[\,(2),\ \text{DN}\,] \qquad \sim\sim UF \equiv \sim\exists\sim F \qquad (3)$$
$$[\,(3),\ \text{DN}\,] \qquad UF \equiv \sim\exists\sim F$$

এ রকম প্রমাণের সর্বশেষ ছত্র হিসাবে উপপাদ্যের পুনরুক্তি করতে হয়। কিন্তু এ বাহুল্য (পুনরুক্তি) বর্জন করতে পারি। সর্বশেষ ছত্রে উপপাদ্যের ক্রমিক সংখ্যাটি লিখলেই চলে। ধর, ওপরে যে উপপাদ্যটির প্রমাণ দেওয়া হয়েছে তা হল উপপাদ্য ১ —Theorem 1 বা সংক্ষেপে—T1। তাহলে উক্ত প্রমাণের সর্বশেষ ছত্র হিসাবে লেখা যায়

$$[\,(3),\ \text{DN}\,]\ \text{T1}$$

সংক্ষেপকরণের যে সব কায়দার কথা বলেছি আমরা সব সময় যে তার সুযোগ নিয়েছি তা নয়। যেখানে মনে হয়েছে, সংক্ষেপকরণ না করাই ভাল, সংক্ষেপকরণ করলে সহজবোধ্যতার হানি হয়, সেখানে সংক্ষেপকরণ থেকে বিরত থেকেছি। যেমন T17-এর প্রমাণে T15-এর পুনরুক্তি করেছি ; T33-এর প্রমাণে T18, T21-এর পুনরুক্তি করেছি।

তারপর, "— ≡ —" আকারের যে সব তন্ত্রবাক্য কোনো বিশেষ নামে (যেমন DN, DM প্রভৃতি নামে) চিহ্নিত নয় সেগুলিতে যে সমার্থতা তার সুযোগ নিয়ে Int প্রয়োগ করতে গিয়ে ভাষ্যে এদের ক্রমিক সংখ্যার সঙ্গে "Int" উল্লেখ করেছি। নিচের অবরোহ খণ্ড দুটি তুলনা কর।

$$\sim\sim UF \equiv \sim\exists\sim F \quad (3)$$

[(3), DN] $\quad UF \equiv \sim\exists\sim F$

আর

$$\sim UF \vee \exists F \quad (1)$$

[(1), T3, Int] $\quad \exists\sim F \vee \exists F$

দেখ, প্রথমটির ভাষ্যে 'Int' কথাটি নেই, দ্বিতীয়টির ভাষ্যে এ কথাটি আছে।

৪. বিধেয়তন্ত্র : বর্ধিত PM তন্ত্র ১

T1. $UF \equiv \sim\exists\sim F$

প্রমাণ

[এ উপপাদ্যের প্রমাণ আগেই দেওয়া হয়েছে। তবু প্রমাণটির পুনরুক্তি করা হল।]

[Id $\dfrac{\sim\exists\sim F}{p}$] $\quad \sim\exists\sim F \equiv \sim\exists\sim F \quad (1)$

[(1), Def $\exists$] $\quad \sim\sim U\sim\sim F \equiv \sim\exists\sim F \quad (2)$

[(2), DN] $\quad \sim\sim UF \equiv \sim\exists\sim F \quad (3)$

[(3), DN] $\quad$ T1

T2. $U\sim F \equiv \sim\exists F$ [*10.253]

প্রমাণ

$\left[\text{T1} \dfrac{\sim F}{F}\right]$ $\quad U\sim F \equiv \sim\exists\sim\sim F \quad (1)$

[(1), DN] $\quad$ T2

T3. $\exists\sim F \equiv \sim UF$ [*10.253]

প্রমাণ

$$(p \equiv \sim q) \supset (q \equiv \sim p) \quad (1)$$

$\left[(1) \dfrac{UF}{p}, \dfrac{\exists\sim F}{q}\right]$ $\quad (UF \equiv \sim\exists\sim F) \supset (\exists\sim F \equiv \sim UF) \quad (2)$

[(2), T1, Inf] $\quad$ T3

বলা বাহুল্য, এ উপপাদ্যগুলির বিষয়বস্তু মানকের পারস্পরিক সম্বন্ধ। এ ব্যাপারে চার রকমের সমার্থতা বাক্য সম্ভব :

(১) UF সম $\sim\exists\sim F$ [T1]

(২) $\sim UF$ সম $\exists\sim F$ [T3]

(৩) $\exists F$ সম $\sim U\sim F$

(৪) $\sim\exists F$ সম $U\sim F$ [T2]

এদের মধ্যে (১), (২), (৪) হল আমাদের উপপাদ্য। (৩)-এতে যে সমার্থতা তা পাই Df ∃ থেকে। প্রসঙ্গত, Principia-তে সংজ্ঞা হিসাবে নেওয়া হয়েছে (২) আর (৪)-এর অনুষঙ্গী বাক্য :

*9.01 $\sim UF \cdot = \cdot \exists \sim F$ Df

*9.02 $\sim \exists F \cdot = \cdot U \sim F$ Df**

T4 $\exists \sim F \vee \exists F$

প্রমাণ

[A6, Def ⊃] $\sim UF \vee \exists F$ (1)

[(1), T3, Int] T4

T5 $\sim \exists F \supset \exists \sim F$

প্রমাণ

[A6, Trans.] $\sim \exists F \supset \sim UF$ (1)

[(1), T3, Int] T5

T6 $U(F \supset F)$

প্রমাণ

[Id, QI] T6

T7 $U(F \vee \sim F)$

প্রমাণ

[Excluded Middle] $p \vee \sim p$ (1) [*2.11]†

[(1), QI] T7

T8 $\sim \exists (F \cdot \sim F)$

প্রমাণ

[Non-contradiction] $\sim (p \cdot p)$ (1) [*3.24 ††

[(1), QI] $U \sim (F \cdot \sim F)$ (2)

[(2), T3, Int] T8

T9 $\sim \exists F \supset U(F \supset G)$

প্রমাণ

$\sim p \supset (p \supset q)$ (1) [*2.21]†††

[(1), DQ 1] $U \sim F \supset U(F \supset G)$ (2)

[(2), T2, Int] T9

T10 $(UF \supset UG) \equiv (\exists \sim G \supset \exists \sim F)$

** Principia-এতে রকম 'ভাষা' ব্যবহার করা হয় নি। ওখানে ব্যবহার করা হয়েছে (x), $(\exists x)$ আর metalogical প্রতীক phi, psi।

† সাংকেতিক যুক্তিবিজ্ঞান—বাক্যকলন, অধ্যায় ২০, উপপাদ্য 10

†† সাংকেতিক……ঐ উপপাদ্য 46

††† সাংকেতিক……ঐ উপপাদ্য 19

প্রমাণ

$\left[\text{Id}\ \frac{UF \supset UG}{p}\right]$ $(UF \supset UG) \equiv (UF \supset UG)$ (1)

[(1), Trans.] $(UF \supset UG) \equiv (\sim UG \supset \sim UF)$ (2)

[(2), T3, Int] $(UF \supset UG) \equiv (\exists\sim G \supset \exists\sim F)$

T11 $U(F \cdot G) \supset (UF \cdot UG)$

প্রমাণ

[Simp.] $(p \cdot q) \supset p$ (1) [*3.26]

[Simp.] $(p \cdot q) \supset q$ (2) [*3.27]

[(1), DQ 1] $U(F \cdot G) \supset UF$ (3)

[(2), DQ 1] $U(F \cdot G) \supset UG$ (4)

[(3), (4), Adj.] $[U(F \cdot G) \supset UF] \cdot [U(F \cdot G) \supset UG]$ (5)

[Composition] $(p \supset q) \supset \{(p \supset r) \supset [p \supset (q \cdot r)]\}$ (6)† [*3.43]

[(6), Expor.] $[(p \supset q) \cdot (p \supset r)] \supset [p \supset (q \cdot r)]$ (7)

$\left[(7)\frac{U(F \cdot G)}{p}, \frac{UF}{q}, \frac{UG}{r}\right]$ $\{[U(F \cdot G) \supset UF]\ \ [U(F \cdot G) \supset UG]\}$
$\supset [U(F \cdot G) \supset (UF \cdot UG)$ (8)

[(8), (5), Inf] T11

T12 $(UF \cdot UG) \supset U(F \cdot G)$

প্রমাণ

$p \supset [q \supset (p \cdot q)]$ (1) [*3.2]††

[(1), DQ 1] $UF \supset U[G \supset (F \cdot G)]$ (2)

$\left[A5\ \frac{G}{F}, \frac{F \cdot G}{G}\right]$ $U[G \supset (F \cdot G)] \supset [UG \supset U(F \cdot G)]$ (3)

[(2), (3), HS] $UF \supset [UG \supset U(F \cdot G)]$ (4)

[(4), Expor.] T12

T13 $U(F \cdot G) \equiv (UF \cdot UG)$ [*10.22]

প্রমাণ

[T11, T12, Adj, Df ≡] T13

T14 $\sim\exists(F \vee G) \equiv (\sim\exists F \cdot \sim\exists G)$

প্রমাণ

$\left[T13\ \frac{\sim F}{F}, \frac{\sim G}{G}\right]$ $U(\sim F \cdot \sim G) \equiv (U\sim F \cdot U\sim G)$ (1)

[(1), DM] $U \sim(F \vee G) \equiv (U\sim F \cdot U\sim G)$ (2)

[(2), T2, Int] T14

T15 $\exists(F \vee G) \equiv (\exists F \vee \exists G)$ [LED]

---

† সাংকেতিক...... ঐ উপপাদ্য 56

†† ঐ, 44

প্রমাণ

$(\sim p \equiv q) \supset (p \equiv \sim q)$ (1)

$\left[(1)\frac{\exists(F \vee G)}{p}, \frac{\sim\exists F \cdot \sim\exists G}{q}\right]$ $[\sim\exists(F \vee G) \equiv (\sim\exists F \cdot \sim\exists G)]$
$\supset [\exists(F \vee G) \equiv \sim(\sim\exists F \cdot \sim\exists G)]$ (2)

[(2), T14, Inf] $\exists(F \vee G) \equiv \sim(\sim\exists F \cdot \sim\exists G)$ (3)

$\left[(3), \text{DM} \frac{\exists F}{p}, \frac{\exists G}{q}\right]$ T15

T16 $\exists F \equiv [\exists(F \cdot G) \vee \exists(F \cdot \sim G)]$

প্রমাণ

$p \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot \sim q)]$ (1) [*4.42]

$\left[\text{Id}, \frac{\exists F}{p}\right]$ $\exists F \equiv \exists F$ (2)

$\left[(1)\frac{F}{p}, \frac{G}{q}\right]$ $F \equiv [(F \cdot G) \vee (F \cdot \sim G)]$ (3)

[(2), (3), Int] $\exists F \equiv \exists[(F \cdot G) \vee (F \cdot \sim G)]$ (4)

[(4), T15, Int] T16

T17 $(\sim\exists F \cdot \sim\exists G) \vee \exists(F \vee G)$

প্রমাণ

[T15] $\exists(F \vee G) \equiv (\exists F \vee \exists G)$ (1)

[(1), Def $\equiv$] $[\exists(F \vee G) \supset (\exists F \vee \exists G)]$.
$[(\exists F \vee \exists G) \supset \exists(F \vee G)]$ (2)

[(2), Simp.] $\exists(F \vee G) \supset (\exists F \vee \exists G)$ (3)

[(3), Def $\supset$] $\sim\exists(F \vee G) \vee (\exists F \vee \exists G)$ (4)

[(4), T14, Int] T17

T18 $\exists(F \supset G) \equiv (\text{U}F \supset \exists G)$

প্রমাণ

$\left[\text{T15} \frac{\sim F}{F}\right]$ $\exists(\sim F \vee G) \equiv (\exists\sim F \vee \exists G)$ (1)

[(1), T3, Int] $\exists(\sim F \vee G) \equiv (\sim\text{U}F \vee \exists G)$ (2)

[(2), Def $\supset$] $\exists(F \supset G) \equiv (\text{U}F \supset \exists G)$ (3)

T19 $\text{U}(F \supset G) \supset (\exists F \supset \exists G)$ [*9.22]

প্রমাণ

$\left[\text{A5} \frac{\sim G}{F}, \frac{\sim F}{G}\right]$ $\text{U}(\sim G \supset \sim F) \supset (\text{U}\sim G \supset \text{U}\sim F)$ (1)

[(1), Trans.] $\text{U}(\sim G \supset \sim F) \supset (\sim\text{U}\sim F \supset \sim\text{U}\sim G)$ (2)

[(2), Trans.] $\text{U}(F \supset G) \supset (\sim\text{U}\sim F \supset \sim\text{U}\sim G)$ (3)

[(3), Def $\exists$] $\text{U}(F \supset G) \supset \exists F \vee \exists G$

T20 $U(F \supset G) \supset (UF \supset \exists G)$

প্রমাণ

$\left[A6\ \frac{F \supset G}{F}\right]$ $U(F \supset G) \supset \exists(F \supset G)$ (1)

[(1), T18, Int] $U(F \supset G) \supset (UF \supset \exists G)$

আরও দুটি মানকসঞ্চালন বিধি :
DQ2, DQ3

T19, T20 থেকে নিষ্কাশন করতে পারি আরও দুটো DQ নিয়ম—মানক সঞ্চালনের নিয়ম। আমরা জানি

যদি ক′ ⊃ খ′ (PM-)তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে

U(ক ⊃ খ)-ও তন্ত্রবাক্য [QI নিয়ম]

এখন

$\left[T19\ \frac{ক}{F},\ \frac{খ}{G}\right]$ U(ক ⊃ খ) ⊃ (∃ক ⊃ ∃খ) (1)

$\left[T20\ \frac{ক}{F},\ \frac{খ}{G}\right]$ U(ক ⊃ খ) ⊃ (Uক ⊃ ∃খ) (2)

ধর, ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য। সেক্ষেত্রে

U(ক ⊃ খ) (3)

এটাও তন্ত্রবাক্য। এখন

[(1), (3), Inf] ∃ক ⊃ ∃খ

[(2), (3), Inf] Uক ⊃ ∃খ

দেখা গেল,

যদি ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে U(ক ⊃ খ) তন্ত্রবাক্য

U(ক ⊃ খ) আর T19 থেকে নিঃসৃত হয় ∃ক ⊃ ∃খ,

∴ যদি ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে ∃ক ⊃ ∃খ তন্ত্রবাক্য

আবার

যদি ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে U(ক ⊃ খ) তন্ত্রবাক্য

U(ক ⊃ খ) আর T20 থেকে নিঃসৃত হয় Uক ⊃ ∃খ

∴ যদি ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে Uক ⊃ ∃খ তন্ত্রবাক্য।

সংক্ষেপে

DQ 2 : যদি ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে

∃ক ⊃ ∃খ-ও তন্ত্রবাক্য

DQ 3 : যদি ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে

Uক ⊃ ∃খ-ও তন্ত্রবাক্য।

পরবর্তী উপপাদ্যে দেখবে DQ 2-এর প্রয়োগ।

T21 $\exists(F \cdot G) \supset (\exists F \cdot \exists G)$ [*10.5]

প্রমাণ

[Simp.]	$(p \cdot q) \supset p$	(1)	[*3.26]
[Simp.]	$(p \cdot q) \supset q$	(2)	[*3.27]
[(1), DQ 2]	$\exists(F \cdot G) \supset \exists F$	(3)	
[(2), DQ 2]	$\exists(F \cdot G) \supset \exists G$	(4)	
[(3), (4), Adj.]	$[\exists(F \cdot G) \supset \exists F] \cdot [\exists(F \cdot G) \supset \exists G]$	(5)	
[Composition]	$[p \supset q) \supset \{(p \supset r) \supset [p \supset (q \cdot r)]\}$	(6)	
[(6), Expor.]	$[(p \supset q) \cdot (p \supset r)] \supset [p \supset (q \cdot r)]$	(7)	

$\left[(7)\ \frac{\exists(F \cdot G)}{p}, \frac{\exists F}{q}, \frac{\exists G}{r}\right]$ $\{[\exists(F \cdot G) \supset \exists F] \cdot [\exists(F \cdot G) \supset \exists G]\}$

$\supset [\exists(F \cdot G) \supset (\exists F \cdot \exists G)]$ (8)

[(8), (5), Inf] T21

এ প্রমাণের সঙ্গে T11-এর প্রমাণ তুলনা করে দেখ।

T22 $(UF \vee UG) \supset U(F \vee G)$ [*10.41]

প্রমাণ

$\left[\text{T21}\ \frac{\sim F}{F}, \frac{\sim G}{G}\right]$	$\exists(\sim F \cdot \sim G) \supset (\exists \sim F \cdot \exists \sim G)$	(1)
[(1), Trans.]	$\sim(\exists \sim F \cdot \exists \quad G) \supset \sim\exists(\sim F \cdot \sim G)$	(2)
[(2), DM]	$(\sim\exists\sim F \vee \sim\exists\sim G) \supset \sim\exists\sim(F \vee G)$	(3)
[(3), T1, Int]	T22	

T13, 15 আর T21, 22-এর পার্থক্য

T13, 15 হল সমার্থতা বাক্য ; কিন্তু T21, 22 প্রতিপত্তি বাক্য, সমার্থতা বাক্য নয়। লক্ষণীয় T21, 22-এর আবর্ত বৈধ নয়, সুতরাং এদের আবর্ত তন্ত্র বাক্য নয়। কেন নয়, দেখ।

T21-এর আবর্ত হল : $(\exists F \cdot \exists G) \supset \exists(F \cdot G)$

এ বাক্য মিথ্যা হতে পারে, সুতরাং অবৈধ। F=মানুষ, G=২০ ফুট লম্বা। মানুষ (F) আছে এবং ২০ ফুট লম্বা বস্তু (G) আছে—এর থেকে নিঃসৃত হয় না যে : ২০ ফুট লম্বা মানুষ আছে ; শেষোক্ত বাক্যটি বস্তুত মিথ্যা।

T22-এর আবর্ত হল : $U(F \vee G) \supset (UF \vee UG)$

এ বাক্যটিও মিথ্যা হতে পারে, সুতরাং অবৈধ। ধর, (মানুষের ক্ষেত্রে) F=পুরুষ, G=নারী। এখন, সব মানুষ পুরুষ-অথবা-নারী ($F \vee G$)—এ বাক্য সত্য, কিন্তু "সব মানুষ হল পুরুষ (UF) অথবা সব মানুষ হল নারী (UG)"—এ বাক্য মিথ্যা।

(১) U, ·-এর বেলায় চলে উভয়মুখী সঞ্চালন

(২) ∃, v-এর বেলায়ও চলে উভয়মুখী সঞ্চালন

T21, 22 থেকে পাই এ সত্য

(৩) ∃, · -এর বেলায় চলে কেবল একমুখী সঞ্চালন
– অসঞ্চালিত রূপ থেকে সঞ্চালিত রূপ

(৪) U, v-এর বেলায় চলে কেবল একমুখী সঞ্চালন
—সঞ্চালিত রূপ থেকে অসঞ্চালিত রূপ

T23 $U(F \vee G) \supset (UF \vee \exists G)$

প্রমাণ

$\left[T19 \frac{\sim F}{F} \right]$	$U(\sim F \supset G) \supset (\exists \sim F \supset \exists G)$	(1)
[(1), Def ⊃]	$U(\sim \sim F \vee G) \supset (\sim \exists \sim F \vee \exists G)$	(2)
[(2), DN]	$U(F \vee G) \supset (\sim \exists \sim F \vee \exists G)$	(3)
[(3), T1, Int]	T23	

T24 $(\exists F \cdot UG) \supset \exists(F \cdot G)$

প্রমাণ

$\left[T20 \frac{\sim F}{F}, \frac{\sim G}{G} \right]$	$U(\sim F \vee G) \supset (U \sim F \vee \exists \sim G)$	(1)
[(1), Trans.]	$\sim(U \sim F \vee \exists \sim G) \supset \sim U(\sim F \vee \sim G)$	(2)
[(2), T2, T3, Int]	$\sim(\sim \exists F \vee \sim UG) \supset \exists \sim(\sim F \vee \sim G)$	(3)
[(3), Def ·]	T24	

তুলনার সুবিধার জন্য T21, 22 আর T23, 24 এক জায়গায় লেখা হল :

T21 $\exists(F \cdot G) \supset (\exists F \cdot \exists G)$ $(\exists F \cdot UG) \supset \exists(F \cdot G)$ **T24**

T22 $(UF \vee UG) \supset U(F \vee G)$ $U(F \vee G) \supset (UF \vee \exists G)$ **T23**

আমরা দেখেছি, T21-এর আবর্ত বৈধ নয়। কিন্তু T21 আর T24 তুলনা করলে দেখবে, T21-এর পূর্বকল্প T24-এর অনুকল্পরূপে দেখা দিয়েছে। T24-এর পূর্বকল্প কী লক্ষ কর।

আবার T22-এর আবর্তও বৈধ নয়। কিন্তু T22 আর T23 তুলনা করলে দেখবে, T22-এর অনুকল্প T23-এর পূর্বকল্পরূপে দেখা দিয়েছে। T23-এর অনুকল্প কী, লক্ষ কর।

T25 $[UF \cdot U(G \vee H)] \supset [\exists(F \cdot G) \vee \exists(F \cdot H)]$

প্রমাণ

[Dist.]	$[p \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$	(1) [*4.4]
[(1), Def ≡, Simp.]	$[p \cdot (q \vee r)] \supset [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$	(2)
[(2), DQ 3]	$[U F \cdot (G \vee H)] \supset \exists [(F \cdot G) \vee (F \cdot H)]$	(3)
$\left[T13 \frac{G \vee H}{G} \right]$	$U[F \cdot (G \vee H)] \equiv [UF \cdot U(G \vee H)]$	(4)

[(3), (4), Int] $[\mathrm{U}F \cdot \mathrm{U}(G \vee H)] \supset \exists(F \cdot G) \vee (F \cdot H)]$ (5)

$\left[\text{T15}\ \frac{F \cdot G}{F}, \frac{F \cdot H}{G}\right]$ $\exists[(F \cdot G) \vee (F \cdot H)] \equiv [\exists(F \cdot G) \vee \exists(F \cdot H)]$ (6)

[(5), (6), Int] T25

T26 $[\sim\exists(F \cdot G) \cdot \exists(F \cdot H)] \supset \exists(\sim G \cdot H)$

প্রমাণ

[Fact.] $(p \supset q) \supset [(p \cdot r) \supset (q \cdot r)]$ (1) [*3.45]†

$\left[(1)\frac{\sim q}{q}\right]$ $(p \supset \sim q) \supset [(p \cdot r) \supset (\sim q \cdot r)]$ (2)

[(2), DQ1] $\mathrm{U}(F \supset \sim G) \supset \mathrm{U}[(F \cdot H) \supset (\sim G \cdot H)]$ (3)

$\left[\text{T19}\ \frac{F \cdot H}{F}, \frac{\sim G \cdot H}{G}\right]$ $\mathrm{U}[(F \cdot H) \supset (\sim G \cdot H)] \supset [\exists(F \cdot H) \supset \exists(\sim G \cdot H)]$ (4)

[3), (4), HS] $\mathrm{U}(F \supset \sim G) \supset [\exists(F \cdot H) \supset \exists(\sim G \cdot H)]$ (5)

[(5), T1, Int] $\sim\exists\sim(F \supset \sim G) \supset [\exists(F \cdot H) \supset \exists(\sim G \cdot H)]$ (6)

[(6). Int††] $\sim\exists(F \cdot G) \supset [\exists(F \cdot H) \supset \exists(\sim G \cdot H)]$ (7)

[(7), Expor.] T26

T27 $(\mathrm{U}F \supset \exists G) \equiv (\mathrm{U}\sim G \supset \exists\sim F)$

প্রমাণ

[Trans.] $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$ (1) [*2.16]†††

$\left[(1)\ \frac{\mathrm{U}F}{p}, \frac{\exists G}{q}\right]$ $(\mathrm{U}F \supset \exists G) \equiv (\sim\exists G \supset \sim\mathrm{U}F)$ (2)

[(2), T3, T2, Int] T27

T28 $\mathrm{U}(F \supset G) \supset [\mathrm{U}(H \supset F) \supset \mathrm{U}(H \supset G)]$

প্রমাণ

$(p \supset q) \supset [(r \supset p) \supset (r \supset q)]$ (1)

[(1), DQ 1] $\mathrm{U}(F \supset G) \supset \mathrm{U}[(H \supset F) \supset (H \supset G)]$ (2)

$\left[\text{A5}\ \frac{H \supset F}{F}, \frac{H \supset G}{G}\right]$ $\mathrm{U}[(H \supset F) \supset (H \supset G)] \supset [\mathrm{U}(H \supset F) \supset \mathrm{U}(H \supset G)]$ (3)

[(2), (3), HS] T28

† সাংকেতিক......উপপাদ্য 57, Fact.=principle of the factor

†† $\sim(p \supset q)$ সম $p \cdot \sim q$

††† সাংকেতিক......উপপাদ্য 15

T29 $U(F \supset G) \supset [\exists(H \cdot \sim G) \supset \exists(H \cdot \sim F)]$

প্রমাণ

[T28, Trans.] $U(F \supset G) \supset [\sim U(H \supset G) \supset \sim U(H \supset F)]$ (1)

[(1), T3, Int] $U(F \supset G) \supset [\exists \sim (H \supset G) \supset \exists \sim (H \supset F)]$ (2)

[(2)† Int] T29

T30 $(UF \cdot \exists G) \supset \exists(F \cdot G)$ (1)

প্রমাণ

[T24] $(\exists F \cdot UG) \supset \exists(F \cdot G)$ (1)

[(1), Com.] $(UG \cdot \exists F) \supset \exists(G \quad F)$ (2)

$\left[(2)\ \frac{G}{F}, \frac{F}{G}\right]$ T30

T31 $(\exists \sim F \cdot \exists \sim G) \vee \exists(F \vee G)$

প্রমাণ

[T22] $(UF \vee UG) \supset U(F \vee G)$ (1)

$\left[A6\ \frac{F \vee G}{F}\right]$ $U(F \vee G) \supset \exists(F \vee G)$ (2)

[(1), (2), HS] $(UF \vee UG) \supset \exists(F \vee G)$ (3)

[(3), Df ⊃] $\sim(UF \vee UG) \vee \exists(F \vee G)$ (4)

[(4), DM] $(\sim UF \cdot \sim UG) \vee \exists(F \vee G)$ (5)

[(5), T3, Int] T31

T32 $\exists F \supset [U(F \supset G) \supset \exists G]$

প্রমাণ

["Comm." ‡] $[p \supset (q \supset r)] \supset [q \supset (p \supset r)]$ (1) [*2.04]‡‡

[T 19] $U(F \supset G) \supset (\exists F \supset \exists G)$ (2)

$\left[(1)\ \frac{U(F \supset G)}{p}, \frac{\exists F}{q}, \frac{\exists G}{r}\right]$ $[U(F \supset G) \supset (\exists F \supset \exists G) \supset \{\exists F \supset [U(F \supset G) \supset \exists G]\}$ (3)

[(3), (2), Inf] T32

---

† $\sim(p \supset q)$ সম $p \cdot \sim q$

‡ PM-এতে এ সূত্রের নাম Commutative Principle, সংক্ষেপে Comm.। অনেকে এ সূত্রটিকে Law of Permutation (Perm.) বলে উল্লেখ করেন। মনে রাখবে PM-এতে Perm হল: $(p \vee q) \supset (q \vee p)$

‡‡ সাংকেতিক......উপপাদ্য 4

T33 $\exists[F \supset (G \cdot H)] \supset [(\mathrm{U}F \supset \exists G) \cdot (\mathrm{U}F \supset \exists H)]$

প্রমাণ

	$[p \supset (q \cdot r)] \supset [(p \supset q) \cdot (p \supset r)]$	(1)
[(1) DQ 2]	$\exists[F \supset (G \cdot H)] \supset \exists[(F \supset G) \cdot (F \supset H)]$	(2)
[T21]	$\exists(F \cdot G) \supset (\exists F \cdot \exists G)$	(3)
$\left[(3)\, \frac{F \supset G}{F}, \frac{F \supset H}{G}\right]$	$\exists[(F \supset G) \cdot (F \supset H)] \supset [\exists(F \supset G) \cdot \exists(F \supset H)]$	(4)
[(2), (4), HS]	$\exists[F \supset (G \cdot H)] \supset [\exists(F \supset G) \cdot \exists(F \supset H)]$	(5)
[T18]	$\exists(F \supset G) \equiv (\mathrm{U}F \supset \exists G)$	(6)
[(5), (6), Int]	$\exists[(F \supset (G \cdot H)] \supset [(\mathrm{U}F \supset \exists G) \cdot \exists(F \supset H)]$	(7)
$\left[(6)\, \frac{H}{G}\right]$	$\exists(F \supset H) \equiv (\mathrm{U}F \supset \exists H)$	(8)
[(7), (8) Int]	T33	

T34 $[\mathrm{U}F \cdot \mathrm{U}(F \supset G)] \supset [\sim\exists H \supset \exists(G \cdot \sim H)]$

প্রমাণ

["Ass." †]	$[p \cdot (p \supset q)] \supset q$	(1) [*3.35]
[(1) DQ 3]	$\mathrm{U}[F \cdot (F \supset G)] \supset \exists G$	(2)
[T13]	$\mathrm{U}(F \cdot G) \equiv [\mathrm{U}F \cdot \mathrm{U}G]$	(3)
$\left[(3) \frac{F \supset G}{G}\right]$	$\mathrm{U}[F \cdot (F \supset G)] \equiv [\mathrm{U}F \cdot \mathrm{U}(F \supset G)]$	(4)
[(2), (4), Int]	$[\mathrm{U}F \cdot \mathrm{U}(F \supset G)] \supset \exists G$	(5)
[T24]	$(\exists F \cdot \mathrm{U}G) \supset \exists(F \cdot G)$	(6)
[(6) Expor.]	$\exists F \supset [\mathrm{U}G \supset \exists(F \cdot G)]$	(7)
$\left[(7)\, \frac{G}{F}, \frac{\sim H}{G}\right]$	$\exists G \supset [\mathrm{U}{\sim}H \supset \exists(G \cdot \sim H)]$	(8)
[(5), (8), HS]	$[\mathrm{U}F \cdot \mathrm{U}(F \supset G)] \supset [\mathrm{U}{\sim}H \supset \exists(G \cdot \sim H)]$	(9)
[(9), T2, Int]	T34	

† PM-এতে "Principle of Assertion"-এর সংক্ষিপ্ত রূপ

৫. বিধেয় তন্ত্র : বর্ধিত PM তন্ত্র ২

T35 $UF \supset Fx$ [*9.2]

প্রমাণ

$\left[A8\ \frac{\sim F}{F}\right]$	$\sim Fx \supset \exists \sim F$	(1)
[(8), Trans., DN]	$\sim\exists\sim F \supset Fx$	(2)
[(2), T1, Int]	T35	

T36 $UF \supset (Fx \cdot Fy)$

প্রমাণ

$\left[T35\ \frac{y}{x}\right]$	$UF \supset Fy$	(1)
[T35, (1), Comp.]	T36	

T37 $U(F \supset G) \supset (Fx \supset Gx)$

প্রমাণ

	$(p \supset q) \equiv \sim(p \cdot \sim q)$	(1)
$\left[T35 \frac{\sim(F \cdot \sim G)}{F}\right]$	$U\sim(F \cdot \sim G) \supset \sim(F \cdot \sim G)x$	(2)
$\left[A7 \frac{\sim G}{G}\right]$	$(F \cdot \sim G)x \equiv (Fx \cdot \sim Gx)$	(3)
[(2), (3), Int]	$U\sim(F \cdot \sim G) \supset \sim(Fx \cdot \sim Gx)$	(4)
$\left[(1) \frac{Fx}{p}, \frac{Gx}{q}\right]$	$(Fx \supset Gx) \equiv \sim(Fx \cdot \sim Gx)$	(5)
[(4), (5), Int]	$U\sim(F \cdot \sim G) \supset (Fx \supset Gx)$	(6)
$\left[(1) \frac{F}{p}, \frac{G}{q}\right]$	$(F \supset G) \equiv \sim(F \cdot \sim G)$	(7)
[(6), (7), Int]	T 37	

T38 $(F \vee G)x \equiv Fx \vee Gx$

প্রমাণ

	$(p \equiv q) \supset (\sim p \equiv \sim q)$	(1)§
$\left[A7\ \frac{\sim F}{F}, \frac{\sim G}{G}\right]$	$(\sim F \cdot \sim G)x \equiv (\sim Fx \cdot \sim Gx)$	(2)
$\left[(1) \frac{(\sim F \cdot \sim G)x}{p}, \frac{\sim Fx \cdot \sim Gx}{q}\right]$	$[(\sim F \cdot \sim G)x \equiv (\sim Fx \cdot \sim Gx)] \supset [\sim(\sim F \cdot \sim G)x \equiv \sim(\sim Fx \cdot \sim Gx)]$	(3)
[(3), (2), Inf]	$\sim(\sim F \cdot \sim G)x \equiv \sim(\sim Fx \cdot \sim Gx)$	(4)
[(4), DM]	T38	

§ সাংকেতিক... উপপাদ্য 61 ও PM *4.11 দ্রষ্টব্য

T39 $(F \supset G)x \equiv (Fx \supset Gx)$

প্রমাণ

$\left[\text{T38}\ \frac{\sim F}{F}\right]$ $(\sim F \vee G)x \equiv (\sim Fx \vee Gx)$ (1)

[(1), Def $\supset$] T39

T40 $(F \equiv G)x \equiv (Fx \equiv Gx)$

প্রমাণ

$(p \equiv r) \supset \{(q \equiv s) \supset [(p \cdot q) \equiv (r \cdot s)]\}$ (1)†

$\left[(1)\ \frac{q}{r}, \frac{r}{q}\right]$ $(p \equiv q) \supset \{(r \equiv s) \supset [(p \cdot r) \equiv (q \cdot s)]\}$ (2)

$\left[\text{T39}\frac{G}{F}, \frac{F}{G}\right]$ $(G \supset F)x \equiv (Gx \supset Fx)$ (3)

$\left[(2)\frac{(F \supset G)x}{p}, \frac{Fx \supset Gx}{q}, \frac{(G \supset F)x}{r}, \frac{Gx \supset Fx}{s}\right]$ T39 $\supset \{(3)$

$\supset [(F \supset G)x \cdot (G \supset F)x] \equiv [(Fx \supset Gx) \cdot (Gx \supset Fx)]\}$ (4)

[(4), T39, Inf] [.... (5)

[(5), (3), Inf] $[F \supset G)x \cdot (G \supset F)x] \equiv [Fx \supset Gx) \cdot (Gx \supset Fx)]$ (6)

$\left[\text{A7}\frac{F \supset G}{F}, \frac{G \supset F}{G}\right]$ $[(F \supset G) \cdot (G \supset F)]x \equiv [(F \supset G)x \cdot (G \supset F)x]$ (7)

[(6), (7), Int] $[(F \supset G) \cdot (G \supset F)]x \equiv [(Fx \supset Gx) \cdot (Gx \supset Fx)]$ (8)

[(8), Def $\equiv$] T40

এ প্রমাণ সুরু হতে পারত দ্বিতীয় পঙক্তি থেকে। কেননা, বলা বাহুল্য, (1)-এর মত (2)-ও PM তন্ত্র বাক্য। তবে বস্তুত PM-এর বাক্য কলনে (1)-এর মত একটি বাক্য [*4.38]† ব্যবহার করা হয়েছে। এটির দিকে দৃষ্টি আকর্ষণের জন্য (1) সংখ্যক বাক্য দিয়ে সুরু করেছি। এ প্রমাণ সম্পর্কে আর একটা কথা। পঙক্তি (4) একটা বিশাল আকারের বাক্য। এটি সংক্ষেপ করার জন্য এর কোনো কোনো অঙ্গবাক্যের জায়গায় অঙ্গবাক্য নির্দেশক সংখ্যা—T39, (3) ব্যবহার করলাম।

তোমাদের হয়ত মনে পড়বে, A7, T38, 39, 40—এ বাক্যগুলির সঙ্গে আমাদের আগেই পরিচয় হয়েছিল। অধ্যায় ১৫, বিভাগ ৩-এতে এগুলিকে আমরা ব্যক্তি-গ্রাহক সঞ্চালন সূত্র বলে বর্ণনা করেছি (পৃ. ২২৪)। ধর, ব হল কোনো অনেকাক্ষরবিধের ব্যক্তিবাক্য। উক্ত সূত্রগুলি দিয়ে ব-কে সব সময় একাক্ষরবিধের বাক্যে রূপান্তরিত করা যাবে।

---

† দ্রষ্টব্য PM, *4.38 : $[(p \equiv r) \cdot (q \equiv s)] \supset [(p \cdot q) \equiv (r \cdot s)]$

T41 $(Fx \cdot Gx) \supset \exists(F \cdot G)$

প্রমাণ

[A8]	$Fx \supset \exists F$	(1)
$\left[(1)\frac{F \cdot G}{F}\right]$	$(F \cdot G)x \supset \exists(F \cdot G)$	(2)
[A7]	$(F \cdot G)x \equiv (Fx \cdot Gx)$	(3)
[(2), (3), Int]	T41	

T42 $(Fx \cdot Gy) \supset (\exists F \quad \exists G)$

প্রমাণ

	$[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(p \cdot q) \supset (r \cdot s)]$	(1) [*3.47]§
[A8]	$Fx \supset \exists F$	(2)
$\left[A8\ \frac{G}{F}, \frac{y}{x}\right]$	$Gy \supset \exists G$	(3)
[(2), (3), Adj]	$(Fx \supset \exists F) \cdot (Gy \supset \exists G)$	(4)
$\left[(1)\frac{Fx}{p}, \frac{Gy}{q}, \frac{\exists F}{r}, \frac{\exists G}{s}\right]$	$[Fx \supset \exists F) \cdot (Gy \supset \exists G)] \supset [(Fx \cdot Gy) \supset (\exists F \cdot \exists G)]$	(5)
[(5), (4), Inf]	T42	

T41 এ 42-এর পার্থক্য লক্ষ কর। T41-এর বক্তব্য সহজবোধ্য : কোনো ব্যক্তি (একই ব্যক্তি x) যদি F-ও হয় G-ও হয় তাহলে এমন বস্তু আছে (যথা x) যা যুগপৎ F-এবং -G। এবার T42-এর বক্তব্য। কোনো ব্যক্তি (ধর x) হল F, আর (অন্য) কোনো ব্যক্তি (ধর y) হল G। এর থেকে এ কথা নিঃসৃত হয় না যে $\exists(F \cdot G)$ —এমন ব্যক্তি আছে যা যুগপৎ F এবং G (পৃঃ ১৬৭, ২৬৩ দ্রষ্টব্য)। কিন্তু এর থেকে এ কথা নিঃসৃত হয় যে $\exists F \cdot \exists G$—এমন ব্যক্তি আছে যা F এবং এমন ব্যক্তি আছে যা G (এবং হয়ত ব্যক্তি দুটি ভিন্ন)।

পরবর্তী উপপাদ্যটি একটি ন্যায়বাক্য—যার অঙ্গবাক্য হল Aaa।

T43 $[U(G \supset H) \cdot Gx] \supset Hx$ [*Aaa* : Barbara] [*10.26]

প্রমাণ

[T37]	$U(F \supset G) \supset (Fx \supset Gx)$	(1)
$\left[(1)\ \frac{G}{F}, \frac{H}{G}\right]$	$U(G \supset H) \supset (Gx \supset Hx)$	(2)
[(2), Expor.]	T43	

অধ্যায় ১৫, বিভাগ ৬-এতে, 'ন্যায় ও ব্যক্তিবাক্য' নামক বিভাগে, আমরা ৬টি ন্যায়-

---

§ সাংকেতিক ...... উপপাদ্য 58

মূর্তির, সুতরাং বলতে পার, ৬ প্রকার ন্যায়বাক্যের কথা বলেছি (পৃঃ ২২৭)। ওপরে এমন একটি ন্যায়বাক্যের প্রমাণ দেওয়া হল। আর নিচে পাবে বাকি ৫টির প্রমাণ।

T44 $[U(G \supset \sim H) \cdot Gx] \supset \sim Hx$ [*Eea* : Celarent]

প্রমাণ

$\left[T37\,\frac{G}{F}, \frac{\sim H}{G}\right]$ $U(G \supset \sim H) \supset (Gx \supset \sim Hx)$ (1)

[(1), Expor,] T44

T45 $[U(H \supset \sim G) \cdot Gx] \supset \sim Hx$ [*Eea* : Cesare]

প্রমাণ

$\left[T37\,\frac{H}{F}, \frac{\sim G}{G}\right]$ $U(H \supset \sim G) \supset (Hx \supset \sim Gx)$ (1)

[(1), Trans., DN] $U(H \supset \sim G) \supset (Gx \supset \sim Hx)$ (3)

[(2), Expor.] T45

T46 $[U(H \supset G) \cdot \sim Gx] \supset \sim Hx$ [*Eea* : Camestres]

প্রমাণ

$\left[T37\,\frac{H}{F}\right]$ $U(H \supset G) \supset (Hx \supset Gx)$ (1)

[(1), Trans.] $U(H \supset G) \supset (\sim Gx \supset \sim Hx)$ (2)

[(2), Expor.] T46

T47 $(Hx \cdot Fx) \supset \exists(F \cdot H)$ [*aaI* : Darapti]

প্রমাণ

T41 $(Fx \cdot Gx) \supset \exists(F \cdot G)$ (1)

$\left[(1)\,\frac{H}{F}, \frac{F}{G}\right]$ $(Hx \cdot Fx) \supset \exists(H \cdot F)$ (2)

[(2), Com.] T47

T48 $(\sim Hx \cdot Fx) \supset \exists(F \cdot \sim H)$ [*eaO* : Felapton]

প্রমাণ

$\left[T41\,\frac{\sim H}{F}, \frac{F}{G}\right]$ $(\sim Hx \cdot Fx) \supset \exists(\sim H \cdot F)$ (1)

[(1), Com.] T48

T49, 50-এর প্রমাণে নিম্নোক্ত বাক্যটি ব্যবহার করা হয়েছে :

$$(p \supset q) \supset \{(r \supset s) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset s)]\}$$

দেখতে পাবে, এটা বৈধ বাক্য ; সুতরাং PM তন্ত্রবাক্য। বস্তুত PM-এতে এ বাক্যটি কিন্তু

প্রমাণ করে দেওয়া হয় নি। তবে PM-এর *3 47†-এর সাহায্য নিয়ে এটা সহজেই প্রমাণ করা যায়। নিচে বাক্যটির প্রমাণ দিয়ে দেওয়া হল।

[*3.47] $[(p \supset q) \cdot (r \supset s)] \supset [(p \cdot r) \supset (q \cdot s)]$ (1)

$\left[(1)\ \frac{\sim s}{r}, \frac{\sim r}{s}\right]$ $[(p \supset q) \cdot (\sim s \supset \sim r)] \supset [(p \cdot \sim s) \supset (q \cdot \sim r)]$ (2)

[(2), Trans.] ....$\supset [\sim(q \cdot \sim r) \supset \sim(p \cdot \sim s)]$ (3)

[(3), Int §] ... .$\supset [(q \supset r) \supset (p \supset s)]$ (4)

[(4), Trans.] $[(p \supset q) \cdot (r \supset s)] \supset [(q \supset r) \supset (p \supset s)]$ (5)

[(5), Expor.] $(p \supset q) \supset \{(r \supset s) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset s)]\}$

T49 $(Fx \supset Gy) \supset (UF \supset \exists G)$

প্রমাণ

$(p \supset q) \supset \{(r \supset s) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset s)]\}$ (1)

$\left[A8\ \frac{G}{F}, \frac{y}{x}\right]$ $Gy \supset \exists G$ (2)

$\left[(1)\ \frac{UF}{p}, \frac{Fx}{q}, \frac{Gy}{r}, \frac{\exists G}{s}\right]$ $(UF \supset Fx) \supset \{(Gy \supset \exists G) \supset$

$[(Fx \supset Gy) \supset (UF \supset \exists G)]\}$ (3)

[(3), T35, Inf] $(Gy \supset \exists G) \supset [(Fx \supset Gy) \supset (UF \supset \exists G)]$ (4)

[(4), (2), Inf] T49

T50 $(\exists F \supset UG) \supset (Fx \supset Gy)$

প্রমাণ

$(p \supset q) \supset \{(r \supset s) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset s)]\}$ (1)

$\left[(1)\ \frac{Fx}{p}, \frac{\exists F}{q}, \frac{UG}{r}, \frac{Gy}{s}\right]$ $(Fx \supset \exists F) \supset \{(UG \supset Gy)$

$\supset [(\exists F \supset UG) \supset (Fx \supset Gy)]\}$ (2)

[(2), A8, Inf] $(UG \supset Gy) \supset [(\exists F \supset UG) \supset (Fx \supset Gy)]$ (3)

$\left[T35\ \frac{G}{F}, \frac{y}{x}\right]$ $UG \supset Gy$ (4)

[(3), (4), Inf] T50

নিচে DQ2, DQ3 সদৃশ আরও দুটো উপবিধি উল্লেখ করা হল। উক্ত উপবিধির সঙ্গে এদের পার্থক্য হল এই : এগুলি প্রযোজ্য মিশ্র বাক্যের ক্ষেত্রে।

---

† সাংকেতিক ...... উপপাদ্য 58

§ $\sim(p \cdot \sim q)$ সম $(p \supset q)$

DQ4 যদি ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে
Uক ⊃ খx-ও তন্ত্রবাক্য

DQ5 যদি ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে
কx ⊃ ∃খ-ও তন্ত্রবাক্য

এ বিধিগুলি PM-এতে যে নিষ্কাশন করা যায় তা নিচে দেখানো হল।

DQ 4-এর নিষ্কাশন

যদি ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে
Uক ⊃ Uখ-ও তন্ত্রবাক্য [DQ1]

ধর, ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য। সেক্ষেত্রে
Uক ⊃ Uখ (1)

এ বাক্যও তন্ত্রবাক্য। এখন

$\left[T35 \frac{খ}{F} \right]$ Uখ ⊃ খx (2)

[(1), (2), HS] Uক ⊃ খx

দেখা গেল, যদি ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে
Uক ⊃ খx-ও তন্ত্রবাক্য।

DQ 5-এর নিষ্কাশন

যদি ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে
∃ক ⊃ ∃খ-ও তন্ত্রবাক্য [DQ3]

ধর, ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য। সেক্ষেত্রে
∃ক ⊃ ∃খ (1)

এটিও তন্ত্রবাক্য। এখন

$\left[A8 \frac{ক}{F} \right]$ কx ⊃ ∃ক (2)

[(2), (1), HS] কx ⊃ ∃খ

দেখা গেল, যদি ক′ ⊃ খ′ তন্ত্রবাক্য হয় তাহলে
কx ⊃ ∃খ-ও তন্ত্রবাক্য।

T51 $U(F \cdot G) \supset (Fx \cdot Gy)$

প্রমাণ

[Simp.]	$(p \cdot q) \supset p$	(1)
[Simp.]	$(p \cdot q) \supset q$	(2)
[(1), DQ 4]	$U(F \cdot G) \supset Fx$	(3)
[(2), DQ 4]	$U(F \cdot G) \supset Gy$	(4)
[(3), (4), Comp.]	T51	

T52 $[U(F \supset G) \cdot U(\sim F \supset G)] \supset Gx$

প্রমাণ

	$(p \supset q) \supset [(\sim p \supset q) \supset q]$	(1) [*2.61]
[(1), Expor.]	$[(p \supset q) \cdot (\sim p \supset q)] \supset q$	(2)†
[(2), DQ4]	$[U(F \supset G) \cdot (\sim F \supset G)] \supset Gx$	(3)
[T13]	$U(F \cdot G) \equiv (UF \cdot UG)$	(4)
$\left[(4) \frac{F \supset G}{F}, \frac{\sim F \supset G}{G}\right]$	$U[(F \supset G) \cdot (\sim F \supset G) \equiv [U(F \supset G) \cdot U(\sim F \supset G)]$	(5)
[(3), (5), Int]	T52	

T53 $[U(F \supset H) \cdot U(G \supset I)] \supset [(F \vee G)x \supset (H \vee I)x]$

প্রমাণ

	$[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(p \vee q) \supset (r \vee s)]$	(1) [*3.48]
[(1), DQ1]	$U[(F \supset H) \cdot (G \supset I)] \supset U[(F \vee G) \supset (H \vee I)]$	(2)
[T37]	$U(F \supset G) \supset (Fx \supset Gx)$	(3)
$\left[(3) \frac{F \vee G}{F}, \frac{H \vee I}{G}\right]$	$U[(F \vee G) \supset (H \vee I)] \supset [(F \vee G)x \supset (H \vee I)x]$	(4)
[(2), (4), HS]	$U[(F \supset H) \cdot (G \supset I)] \supset [(F \vee G)x \supset (H \vee I)x]$	(5)
[T13]	$U(F \cdot G) \equiv (UF \cdot UG)$	(6)
$\left[(6) \frac{F \supset H}{F}, \frac{G \supset I}{G}\right]$	$U[(F \supset H) \cdot (G \supset I)] \equiv [U(F \supset H) \cdot U(G \supset I)]$	(7)
[(5), (7), Int]	T53	

T54 $[U(F \supset H) \cdot U(G \supset H)] \supset [(F \vee G)x \supset Hx]$

প্রমাণ

	$(p \vee p) \equiv p$	(1)
$\left[T53 \frac{H}{I} \right]$	$[U(F \supset H) \cdot U(G \supset H)] \supset [(F \vee G)x \supset (H \vee H)x$	(2)
$\left[(1) \frac{H}{p}\right]$	$(H \vee H) \equiv H$	(3)
[(2), (3), Int]	T54	

Dilemma (বা দ্বিকল্প ন্যায়) এক বিশেষ প্রকারের যুক্তির নাম হিসাবে ব্যবহৃত হয়। আমরা এ কথাটি দিয়ে এর অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক বাক্যও বোঝাতে চাইছি। Dilemma-এর অনুষঙ্গী প্রাকল্পিক বাক্যকে আমরা দ্বিকল্পন্যায় বাক্য বলে উল্লেখ করব।

---

† এ সূত্রের নাম analytic dilemma সূত্র। Johnson একে dilemma বলে অভিহিত করেছেন।

এখন T52, 53, 54 ভাল করে লক্ষ কর। দেখবে, এগুলি আসলে দ্বিকল্পন্যায় বাক্যের বিভিন্ন রূপ। দেখবে—

T52 : সরল অন্বয়ী দ্বিকল্পন্যায় বাক্য (বিশ্লেষক)
[Simple Constructive Dilemma (Analytic)]

T54 : সরল অন্বয়ী দ্বিকল্পন্যায় বাক্য (সংশ্লেষক)
[Simple Constructive Dilemma (Synthetic)]

T53 : জটিল অন্বয়ী দ্বিকল্পন্যায় বাক্য
[Complex Constructive Dilemma]

T55 $(\exists F \supset Gx) \supset (\sim \exists G \supset \sim Fy)$

প্রমাণ

$$(p \supset q) \supset \{(r \supset s) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset s)]\} \quad (1)‡$$

$\left[(1)\frac{Fy}{p}, \frac{\exists F}{q}, \frac{Gx}{r}, \frac{\exists G}{s}\right]$ $(Fy \supset \exists F) \supset \{(Gx \supset \exists G) \supset [(\exists F \supset Gx) \supset (Fy \supset \exists G)]$ (2)

[A8] $Fx \supset \exists F$ (3)

$\left[(3)\frac{y}{x}\right]$ $Fy \supset \exists F$ (4)

[(2), (4), Inf] $(Gx \supset \exists G) \supset [(\exists F \supset Gx) \supset (Fy \supset \exists G)]$ (5)

$\left[\text{A } 8\frac{G}{F}\right]$ $Gx \supset \exists G$ (6)

[5, (6), Inf] $(\exists F \supset Gx) \supset (Fy \supset \exists G)$ (7)

[7, Trans.] T 55

T 56 $(Fx \equiv Gy) \supset [(\text{U}F \supset \exists G) \cdot (\text{U}G \supset \exists F)]$

প্রমাণ

$[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(p \cdot q) \supset (r \cdot s)$ (1) [*3.47]

[T 49] $(Fx \supset Gy) \supset (\text{U}F \supset \exists G)$ (2)

$\left[(2), \frac{G}{F}, \frac{F}{G}, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right]$ $(Gy \supset Fx) \supset (\text{U}G \supset \exists F)$ (3)

[(2), (3), Adj] $[(Fx \supset Gy) \supset (\text{U}F \supset \exists G)] \cdot [(Gy \supset Fx) \supset \text{U}G \supset \exists F)]$ (4)

$\left[(1)\frac{Fx \supset Gy}{p}, \frac{\text{U}F \supset \exists G}{r}, \frac{Gy \supset Fx}{q}, \frac{\text{U}G \supset \exists F}{s}\right]$

$$\{[(Fx \supset Gy) \supset (\text{U}F \supset \exists G)] \cdot [(Gy \supset Fx) \supset (\text{U}G \supset \exists F)]\} \supset \{[(Fx \supset Gy) \cdot (Gy \supset Fx)] \supset [(\text{U}F \supset \exists G) \cdot (\text{U}G \supset \exists F)]\} \quad (5)$$

‡ T49-এর ভূমিকা হিসাবে যে কথা বলা হয়েছে তা দেখ।

[(5), (4), Inf] $[(Fx \supset Gy) \cdot (Gy \supset Fx)] \supset [(UF \supset \exists G) \cdot (UG \supset \exists F)]$ (6)

[(6), Def ≡] T 56

T 57 $U[F \supset (G \cdot H)] \supset [(Fx \supset Gx) \cdot (Fy \supset Hy)]$

প্রমাণ

$[(p \supset r) \cdot (q \supset s)] \supset [(p \cdot q) \supset (r \cdot s)]$ (1) [*3.47]

[T 37] $U(F \supset G) \supset (Fx \supset Gx)$ (2)

$\left[(2)\frac{H}{G}, \frac{y}{x}\right]$ $U(F \supset H) \supset (Fy \supset Hy)$ (3)

$\left[(1)\frac{U(F \supset G)}{p}, \frac{Fx \supset Gx}{r}, \frac{U(F \supset H)}{q}, \frac{Fy \supset Hy}{s}\right]$

$\{[U(F \supset G) \supset (Fx \supset Gx)] \cdot [U(F \supset II) \supset (Fy \supset Hy]\} \supset \{[U(F \supset G) \cdot U(F \supset H)] \supset [(Fx \supset Gx) \cdot (Fy \supset Hy)\}$ (4)

[(2), (3), Adj.] $[U(F \supset G)]\supset(Fx \supset Gx)] \cdot [U(F \supset H) \supset (Fy \supset Hy)]$ (5)

[(4), (5), Inf] $[U(F \supset G) \cdot U(F \supset H)] \supset [(Fx \supset Gx) \cdot (Fy \supset Hy)]$ (6)

[T 13] $U(F \cdot G) \equiv (UF \cdot UG)$ (7)

$\left[(7)\frac{F \supset G}{F}, \frac{F \supset H}{G}\right]$ $U[(F \supset G) \cdot (F \supset H) \equiv [U(F \supset G) \cdot U(F \supset H)$ (8)

[(6), (8), Int] $U[(F \supset G) \cdot (F \supset H)] \supset [(Fx \supset Gx) \cdot (Fy \supset Hy)]$ (9)

[9, Comp.] T 57

T 58 $[Fx \supset (Fy \supset Gz)] \supset (UF \supset \exists G)$

প্রমাণ

$(p \supset q) \supset [(q \supset r) \supset (p \supset r)]$ (1)[*2.06)†

[T 36] $UF \supset (Fx \cdot Fy)$ (2)

$\left[(1)\frac{UF}{p}, \frac{Fx \cdot Fy}{q}, \frac{Gz}{r}\right]$ $(UF \supset (Fx \cdot Fy)] \supset \{[(Fx \cdot Fy) \supset Gz] \supset (UF \supset Gz)\}$ (3)

[(3), (2) Inf] $[(Fx \cdot Fy) \supset Gz] \supset (UF \supset Gz)$ (4)

[(4), Expor.] $\{[(Fx \cdot Fy) \supset Gz] \cdot UF\} \supset Gz$ (5)

† সাংকেতিক......উপপাদ্য 6

[A 8]	$Fx \supset \exists F$	(6)
$\left[(6)\ \frac{G}{F},\ \frac{z}{x}\right]$	$Gz \supset \exists G$	(7)
[(5), (7), HS]	$\{[(Fx \cdot Fy) \supset Gz] \cdot UF\} \supset \exists G$	(8)
[(8), Expor.]	$[(Fx \cdot Fy) \supset Gz] \supset (UF \supset \exists G)$	(9)
[(9), Expor.]	T58	

বিধেয়তন্ত্রের উপপাদ্যগুলিকে আমরা দুভাগে ভাগ করেছি। কতকগুলি উপপাদ্য বর্ধিত PM তন্ত্র ১-এর, আর কতকগুলি উপপাদ্য বর্ধিত PM তন্ত্র ২-এর, অন্তর্ভুক্ত। এখানে তুমি একটা আপত্তি তুলতে পার। বলতে পার : এ তন্ত্রখণ্ড দুটির স্বীকার্য মৌলবাক্য (সংজ্ঞা ইত্যাদি) অভিন্ন, তাহলে বিধেয় তন্ত্রের মধ্যে দুটি ভাগ কল্পনা করব কেন? আসলে স্বীকার্য মৌলবাক্য দু ক্ষেত্রে ঠিক অভিন্ন নয়। জটিলতা এড়াবার জন্য মৌলবাক্যগুলি একসঙ্গে লিপিবদ্ধ করেছি। আর তন্ত্র ১ ও তন্ত্র ২ বলে দুটি তন্ত্রখণ্ড কল্পনা করছি কেন তার উত্তর আগেই দেওয়া হয়েছে (পৃঃ ২৫০ দ্রষ্টব্য)।

বর্ধিত PM তন্ত্র ১-এর
মৌল বাক্য

A 1 $(p \vee p) \supset p$
A 2 $q \supset (p \vee q)$
A 3 $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
A 4 $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$
A 5 $U(F \supset G) \supset (UF \supset UG)$
A 6 $UF \supset \exists F$

বর্ধিত PM তন্ত্র ২-এর
মৌল বাক্য

A 1 $(p \vee p) \supset p$
A 2 $q \supset (p \vee q)$
A 3 $(p \vee q) \supset (q \vee p)$
A 4 $(q \supset r) \supset [(p \vee q) \supset (p \vee r)]$
A 5 $U(F \supset G) \supset (UF \supset UG)$
A 7 $(F \cdot G)x \equiv (Fx \cdot Gx)$
A 8 $Fx \supset \exists F$

এ তালিকা দুটি লক্ষ করলে বোঝা যাবে PM বাক্যতন্ত্র PM বর্ধিত তন্ত্র ১-এরও অন্তর্ভুক্ত, PM বর্ধিত তন্ত্র ২-এরও অন্তর্ভুক্ত। আরও একটা কথা। তন্ত্র ১-এর A6 ছাড়া অন্য সব মৌলবাক্য তন্ত্র ২-এর মৌলবাক্যের অন্তর্ভুক্ত। দেখা যাবে A6 চিহ্নিত বাক্যটি তন্ত্র ২-এতে

উপপাদ্য হিসাবে প্রমাণ করা যায়। এর থেকে বোঝা যাবে, তন্ত্র ১ হল তন্ত্র ২-এর অন্তর্ভুক্ত, বোঝা যাবে—এ প্রসঙ্গে তন্ত্র ২ সর্বাপেক্ষা ব্যাপক তন্ত্র।

এবার A6 সংখ্যক বাক্যটির অবরোহণ।

উপপাদ্য $UF \supset \exists F$

প্রমাণ

[T 35] $UF \supset Fx$ (1)
[A 8] $Fx \supset \exists F$ (2)
[(1), (2), HS] $UF \supset \exists F$

অনুশীলনী

১. বিধেয় তন্ত্র ১-এতে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি নিষ্কাশন কর।

(a) $\sim\exists F \supset U(F \supset G)$
(b) $(UF \supset UG) \equiv (\exists\sim G \supset \exists\sim F)$
(c) $(UF \cdot \exists G) \supset \exists(F \cdot G)$
(d) $(\sim\exists F \cdot \sim\exists G) \vee \exists(F \vee G)$
(e) $\exists F \supset [U(F \supset G) \supset \exists G]$
(f) $[\sim\exists(F \cdot G) \cdot \exists(F \cdot H)] \supset \exists(\sim G \cdot H)$
(h) $\exists[F \supset (G \cdot H)] \supset [(UF \supset \exists G) \quad (UF \supset \exists H)]$

২. বিধেয় তন্ত্র ২-এতে নিম্নোক্ত বাক্যগুলি নিষ্কাশন কর।

(i) $(Fx \cdot Gx) \supset \exists(F \cdot G)$
(ii) $(Fx \cdot Gy) \supset (\exists F \cdot \exists G)$
(iii) $[Fx \supset (Fy \supset Gz)] \supset (UF \supset \exists G)$
(iv) $(\exists F \supset Gx) \supset (\sim\exists G \supset \sim Fy)$
(v) $(Fx \equiv Gy) \supset [(UF \supset \exists G) \cdot (UG \supset \exists F)]$
(vi) $U[F \supset (G \cdot H)] \supset [(Fx \supset Gx) \cdot (Fy \supset Hy)]$

—Hughes & Londey

ভ্রম সংশোধন

পৃঃ ১৯০, বিভাগ ৪-এতে :

চতুর্থ ছত্রের পূর্বকল্প হবে এমন : $\sim \exists G\bar{H} \cdot \sim \exists FG$

সপ্তম ছত্রে '⊃'-এর পর যুক্ত করে নিতে হবে : $\exists($

একাদশ ছত্রে অনুকল্পটির পূর্বে "~" যোগ করে নিতে হবে, মানে এ ছত্রটি নির্ভুল রূপ হবে ঃ

$$[\sim(B \vee F) \cdot \sim(A \vee B)] \supset \sim(A \vee C)$$

এ ছত্রটি ভুল ছিল (এর সর্বশেষ '~' বাদ গিয়েছিল)। ফলে যে fell swoopটি করা হয়েছে তাও ভ্রান্ত। আলোচ্য ছত্রটির fell swoop নেবে এ রূপ।

Fell Swoop

ধরা যাক, পূর্বকল্পটি সত্য। তাহলে $A=0$, $B=0$, $F=0$। অনুকল্পে যোগ্য মূল্য বসিয়ে পাই :

$$\begin{array}{lc} [\sim(B \vee F) \cdot \sim(A \vee B)] \supset & \sim(A \vee C) \\ & \sim(0 \vee C) \\ & \sim C \\ 0 \quad\quad 1 & \end{array}$$

দেখা গেল, পূর্বকল্পটি সত্য হলে অনুকল্পটি মিথ্যাও হতে পারে। সুতরাং প্রাকল্পিকটি অবৈধ। সুতরাং প্রথম সংস্থানে AEE অবৈধ।

গ্রন্থপঞ্জি

[অ্যাকেরমান্] Ackermann, R. J. : Modern Deductive Logic

[এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিট্স্] Ambrose, A. & Lazerowitz, M. : Fundamentals of Symbolic Logic

[বারকার] Barker, S. F. : The Elements of Logic

[ব্লুমবার্গ] Blumberg, A. E. : Logic—A First Course

[কারনাপ] Carnap, Rudolf : Introduction to Symbolic Logic and its Applications

[কোপি] Copi, I. M. : Symbolic Logic

[কুলি] Cooley, J. C. : A Primer of Formal Logic

[হ্যারিসন্] Harrison III, F. R. : Deductive Logic and Descriptive Language

[হজেস্] Hodges, Wilfrid : Logic

[হিউজেস-লন্ডি] Hughes, G. F. & Londey, D. G. : The Elements of Formal Logic

[গুটেনপ্ল্যান-ট্যামনি] Guttenplan, S. D. & Tamny, M. : Logic : A Comprehensive Introduction

[গুস্টাসন্-উলরিচ্] Gustason W. & Ulrich, D.E. : Elementary Symbolic Logic

[জেফ্রি] Jeffrey, R. C. : Formal Logic : Its Scope and Limits

[কান্] Kahne, Howard : Logic and Philosophy—A Modern Introduction

[কালিস্-মণ্টেগ] Kalish, D. & Montague R. : Logic : Technique of Formal Reasoning

[কিলগোর] Kilgore, W.J. : An Introductory Logic

[লেব্লাঙ্ক্-উইসডম্] Leblanc & Wisdom : Deductive Logic

[মেটস্] Mates, Benson : Elementary Logic

[পস্‌পেসিল] Pospesel, Howard : Predicate Logic—Introduction to Logic

[কোয়াইন্ (১)] Quine, W. V. : Elementary Logic

[কোয়াইন্ (২)] ,, ,, ,, : Methods of Logic

[রায়খেনবাখ্] Reichenbach, Hans : Elements of Symbolic Logic

[রেজনিক্] Resnik : Elementary Logic

[রাসেল-হোয়াইটহেড্] Whitehead & Russell : Principia Mathematica to *56

[সুপিস্] Suppes, Patrick : Introduction to Logic

পাঠনির্দেশ

পঠনীয় গ্রন্থের নাম উল্লেখ না করে কেবল গ্রন্থকারের নাম উল্লেখ করা হল। গ্রন্থপঞ্জি দেখলেই বোঝা যাবে কোন গ্রন্থকার-নাম কোন বই বোঝাচ্ছে।

'পাঠনির্দেশ'-এতে বহু বইর কথা বলা হয়েছে। তবে নিম্নোক্ত বইগুলি বিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য।

Ambrose & Lazerowitz : Fundamentals of Symbolic Logic
Copi : Symbolic Logic
Hughes and Londey : The Elements of Formal Logic
Jeffrey : Formal Logic : its Scope and Limits
Quine : Methods of Logic

১

ভূমিকা : বিধেয় যুক্তি ও বিভিন্ন প্রকারের সংকেতলিপি

হিউজেস্-লন্ডি : অধ্যায় ২৩, পস্পেসিল্ অধ্যায় ১

২

ব্যক্তিবিষয়ক বাক্য

পস্পেসিল্ : অধ্যায় ২ ; এ্যামব্রোস্-ল্যাজারওবিটস্ · অধ্যায় ৯ ; কোপি : অধ্যায় ৪, বিভাগ ৪.১ ; ব্লুমবার্গ বিভাগ ৩৬ ; কোপি অধ্যায় ৪ , কান্ : অধ্যায় ৬ ; লেব্লাঙ্ক-উইস্ডম্ : অধ্যায় ২, বিভাগ ১

৩

জাতিবিষয়ক বাক্য

কোপি : অধ্যায় ৪, বিভাগ ৪ ১ , কান্ : অধ্যায় ৬ ; বারকার : অধ্যায় ৪ ; এ্যামব্রোস-ল্যাজারওবিটস . অধ্যায় ৯ , কুলি : অধ্যায় ৪ ; ব্লুমবার্গ : বিভাগ ৩৭, ৩৮ ; কোয়াইন্ : বিভাগ ২১ ; পসপেসিল্ : অধ্যায় ২ ; লেব্লাঙ্ক-উইস্ডম্ : অধ্যায় ২.১

৪

জাতিবিষয়ক বাক্য : মানকলিপিতে অনুবাদ

এ্যামব্রোস-ল্যাজারওবিটস্ : অধ্যায় ৯, কোপি : অধ্যায় ৪, বিভাগ ৪.১ ; বারকার : অধ্যায় ৪ ; হ্যারিসন্ : অধ্যায় ১১, বিভাগ ১, ২ ; পসপেসিল : অধ্যায় ২ কান্ ঃ অধ্যায় ৩ ; কোয়াইন্ : বিভাগ ২১, ব্লুমবার্গ : বিভাগ ৩৮ ; কুলি : অধ্যায় ৪ ; লেব্লাঙ্ক-উইস্ডম্ : অধ্যায় ২.১

৫

মানকিত বাক্যের সমার্থক ও বিরুদ্ধ বাক্য

জেফ্রি : অধ্যায় ৬ ; কোয়াইন : বিভাগ ২১ ; সুপিস্ : অধ্যায় ৪, বিভাগ ৪.৪ ; এ্যামব্রোস-ল্যাজারোবিটস্ : অধ্যায় ৯ ; হ্যারিসন্ : অধ্যায় ১২, বিভাগ ৪

৬

প্রমাণ পদ্ধতি : মুখ্য অবরোহ পদ্ধতি

বারকার : অধ্যায় ৪ ; পসপেসিল্ : অধ্যায় ৩, ৪, ৫ , ব্লুমবার্গ · বিভাগ ৪৫ ; সুপিস : অধ্যায় ৪ ; কোপি : অধ্যায় ৪, বিভাগ ৪ ২ ; কোয়াইন : বিভাগ ২৯

৭

প্রমাণ পদ্ধতি : প্রচলিত অবরোহ পদ্ধতি

কোপি : বিভাগ ৪.২ ; ব্লুমবার্গ : বিভাগ ৪৫, ৪৬ ; কান্ : অধ্যায় ৬, ৭ ; গুসটাসন্-উলরিচ : অধ্যায় ৬ ; সুপিস : অধ্যায় ৪ ; গুটেনপ্ল্যান্-ট্যাম্নি : বিভাগ ৪.৪ ; হ্যারিসন্ : অধ্যায় ১২, বিভাগ ১—৪

৮

UG ও EI-এর ন্যায্যতা

কোপি : বিভাগ ৪.২ ; ব্লুমবার্গ : বিভাগ ৪৬

৯

অবৈধতা প্রমাণ পদ্ধতি

কান্ : অধ্যায় ৮ ; কোপি : বিভাগ ৪.৩ , হিউজেস্-ক্রেস্‌ওয়েল : অধ্যায় ২৬ ; গুটেনপ্ল্যান্-ট্যাম্নি : বিভাগ ৪ ২ ১ ; কোয়াইন্ : বিভাগ ২১

১০

সত্যশাখী পদ্ধতি

জেফ্রি : অধ্যায় ৬ ; ব্লুমবার্গ : বিভাগ ৪৪ ; গুটেনপ্ল্যান্-ট্যাম্নি : বিভাগ ৪.৬ ; লেব্লাঙ্ক-উইসডম্ : বিভাগ ২.২

১১

মানকলিপির সরলীকরণ

কোয়াইন্ : বিভাগ ১৮ ; হিউজেস্-ক্রেস্‌ওয়েল : অধ্যায় ২৩

১২

সম্ভ প্রাকল্পিক পদ্ধতি

কোয়াইন্ : বিভাগ ১৯

১৩

প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি

কোয়াইন্ : বিভাগ ১৯
হিউজেস্-লন্ডি : অধ্যায় ২৫

১৪

সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি

কোয়াইন্ : বিভাগ ১৮
হিউজেস্-লন্ডি : অধ্যায় ২৭

১৫

মিশ্র বাক্য ও নির্ণয় পদ্ধতি

হিউজেস্-লন্ডি : অধ্যায় ৩২, ৩৩ ; কোয়াইন্ : বিভাগ ৩৮

১৬

বিধেয় বাক্যের তন্ত্রীকরণ

কুলি : বিভাগ ২৯ ; রাসেল-হোয়াইটহেড্ : *৯, *১০ ; হিউজেস্-লন্ডি : অধ্যায় ২৯, ৩৫

পরিভাষা

তারকাচিহ্নিত শব্দগুলি গ্রন্থকারের রচনা, অন্যগুলি সংগৃহীত।

অধিতাত্ত্বিক প্রতীক*—metalogical symbol
অনেকব্যক্তিক বিধেয়*—polyadic predicate
অনেকমানক বাক্য—multiple quantification
অনেকার্থক নাম—ambiguous name
অপনয়—elimination
অবৈকল্পিক*—degenerate alternation
অশূন্য-বিশ্ব-মানা যুক্তিবিজ্ঞান*—logic of non-empty universe
অসম্ভবতার নিয়ম*—law of absurdity
অসীমিত বৈকল্পিক—infinite alternation
অসীমিত সংযৌগিক—infinite conjunction
আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ পদ্ধতি*—method of resolution
উপনয়*—introduction
উপবিধি*—derived rule
ঊনসার্বিক বাক্য*—exceptive proposition
একব্যক্তিক বিধেয়*—monadic predicate
গঠনের নিয়ম—formation rule
গ্রাহক প্রতীক*—variable
চতুবর্গ পরিকল্পনা*—fourfold scheme
জাতিবিষয়ক বাক্য—general proposition
ত্রিব্যক্তিক বিধেয়*—triadic predicate
দৃষ্টান্তীকরণ*—instantiation
দ্বিব্যক্তিক বিধেয়*—dyadic predicate
নামগ্রাহক*—name (term) variable
নির্ণয় পদ্ধতি*—decision procedure
পদগ্রাহক*—term variable
বাক্যযুক্তি*—sentential argument
বাচনিক অপেক্ষক*—propositional function
বিচ্যুতিকরণ*—conditionalization, discharge
বিচ্ছেদনবিধি*—rule of detachment
ব্যক্তিগ্রাহক*—individual variable
ব্যক্তিবাক্য*—singular proposition
ব্যক্তিবাচক পদ—singular term
মানক অপনয়—quantifer elimination
মানক উপনয়—quantifier introduction
মানকলিপি*—quantificational notation
মানক সঞ্চালন*—distribution of quantifiers
মানকিতকরণ*—to quantify
মুক্ত অবস্থান*—free occurrence
মুক্ত গ্রাহক—free variable
মুক্ত বাক্য—open sentence
মূল বিধেয় বাক্য*—basic predicate expression
মূল ব্যক্তিবাক্য—basic individual expression, individual basic expression
মেকি নাম*—pseudo-name
যুক্তিবিধি—rule of inference
যোগ্য নাম—appropriate name
রূপান্তর নিয়ম—transformation rule
শূন্য-বিশ্ব-মানা যুক্তিবিজ্ঞান*—logic of empty universe
সংকেতলিপি*—notation
সংক্ষেপক প্রতীক*—shorthand symbol
সত্যশাখী*—truth tree
সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি*—method of existential conditional
সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি*—alternational method (CNF method)
সাত্ত্বিক মানক*—existential quantifier
সাত্ত্বিকমানকিতকরণ*—to existentially quantify
সার্বিক মানক—universal quantifier
সার্বিকমানকিতকরণ*—to universally quantify
সার্বিকীকরণ*—universalization
স্বীয় নাম—proper name

Absurdity, law of—অসম্ভবতার নিয়ম
Alternational method—সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি
Ambiguous name—অনেকার্থক নাম
Arbitrarily selected name—বানানো নাম
Axiomatization—তন্ত্রীকরণ
Basic existence expression—মূল সত্ত্ব বাক্য
Basic individual expression—মূল ব্যক্তিবাক্য
Basic predicate expression—মূল বিধেয় বাক্য
Bound occurrence—বদ্ধ অবস্থান
Bound variable—বদ্ধ গ্রাহক
Cellular method—প্রকোষ্ঠ পদ্ধতি
CNF method—সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি
Conditionalization—বিচ্যুতিকরণ
Decision procedure—নির্ণয় পদ্ধতি
Degenerate alternation—অববৈকল্পিক
Degenerate conjunction—অবসংযোগিক
Derived Rule—উপবিধি
Discharge—বিচ্যুতিকরণ
Distribution of quantifier—মানক সঞ্চালন
Dyadic predicate—দ্বিব্যক্তিক বিধেয়
Elimination of quantifier—মানক অপনয়ন
Exceptive proposition—ঊনসার্বিক বাক্য
Existential conditional, method of—সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি
Existential quantifier—সাত্তিক মানক
Fell swoop—পক্ষপাতন
Formation rule—গঠনের নিয়ম
Free occurrence—মুক্ত অবস্থান
Free variable—মুক্ত গ্রাহক
Formation rule—গঠনের নিয়ম
Generalization—সার্বিকীকরণ
General proposition—জাতিবিষয়ক বাক্য
Individual variable—ব্যক্তিগ্রাহক
Infinite alternation—অসীমিত বৈকল্পিক
Infinite conjunction—অসীমিত সংযোগিক
Instantiation—দৃষ্টান্তীকরণ
Logic of empty universe—শূন্য-বিশ্ব-মানা যুক্তিবিজ্ঞান
Logic of non-empty universe—অশূন্য-বিশ্ব-মানা যুক্তিবিজ্ঞান
Metalogical symbol—অধিতাত্ত্বিক প্রতীক
Method of CNF—সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি
— of alternational expression—সৎ বৈকল্পিক পদ্ধতি
— of existential conditional—সত্ত্ব প্রাকল্পিক পদ্ধতি
— of resolution—আনুক্রমিক দ্বিশাখীকরণ
Monadic predicate—একব্যক্তিক বিধেয়
Multiple quantification—অনেকমানকিত বাক্য, অনেকমানকিতকরণ
Multiply general proposition—অনেকমানকিত বাক্য
Open sentence—মুক্ত বাক্য
Polyadic predicate—বহুব্যক্তিক বিধেয়
Predicate argument—বিধেয় যুক্তি
Propositional function—বাচনিক অপেক্ষক, মুক্ত বাক্য
Pseudo-name—মেকি নাম
Rule of detachment—বিচ্ছেদন বিধি
Rule of inference—যুক্তিবিধি
Rule of quantifier introduction—মানক উপনয়বিধি
Sentential argument—বাক্য যুক্তি
Shorthand symbol—সংক্ষেপক প্রতীক
Singular proposition—ব্যক্তিবাক্য
Subordinate proof—উপপ্রমাণ
Term variable—পদগ্রাহক
Triadic predicate—ত্রিব্যক্তিক বিধেয়
Truth tree—সত্যশাখী
Variable—গ্রাহক প্রতীক
Universal quantifier—সার্বিক মানক
Universal quantification—সার্বিক মানকিতকরণ, সার্বিকমানকিত বাক্য
Universalization—সার্বিকীকরণ

অনুক্রমণী

মোটা হরফে লেখা সংখ্যাগুলি অধ্যায় সংখ্যা ; অন্যগুলি পৃষ্ঠা সংখ্যা